

4

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEL PIANO

Passiamo in questo capitolo a considerare alcuni aspetti dello studio delle equazioni differenziali nel piano, o su una varietà a due dimensioni. Avremo dunque a che fare con equazioni della forma generale

$$(4.1) \quad \dot{x} = f(x, y) , \quad \dot{y} = g(x, y) ,$$

dove $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono funzioni regolari (almeno di classe C^1) dei loro argomenti su un dominio $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$, e definiscono in \mathcal{G} un campo vettoriale, come abbiamo discusso nel paragrafo 2.5.

In questa categoria rientra il caso notevole dei sistemi meccanici nella loro forma più semplice: quella di un punto materiale che possa muoversi su una varietà ad una dimensione, tipicamente una retta od una circonferenza. A questi due casi sarà dedicato spazio più ampio nella discussione di questo capitolo.

La dinamica di un sistema meccanico è retta dall'equazione di Newton, che abbiamo già introdotto nel capitolo 1:

$$(4.2) \quad m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) ,$$

Un tal sistema si può ricondurre allo schema delle equazioni (4.1) introducendo la velocità come variabile ausiliaria, e riscrivendo l'equazione di Newton nella forma

$$(4.3) \quad \dot{x} = v , \quad \dot{v} = \frac{F(x, v, t)}{m} .$$

Ciò mette ben in evidenza il fatto che lo spazio delle fasi è bidimensionale: lo stato del sistema è completamente determinato da posizione e velocità del punto. L'uso della notazione v invece che y per la seconda coordinata starà a ricordarci che si tratta proprio della velocità.

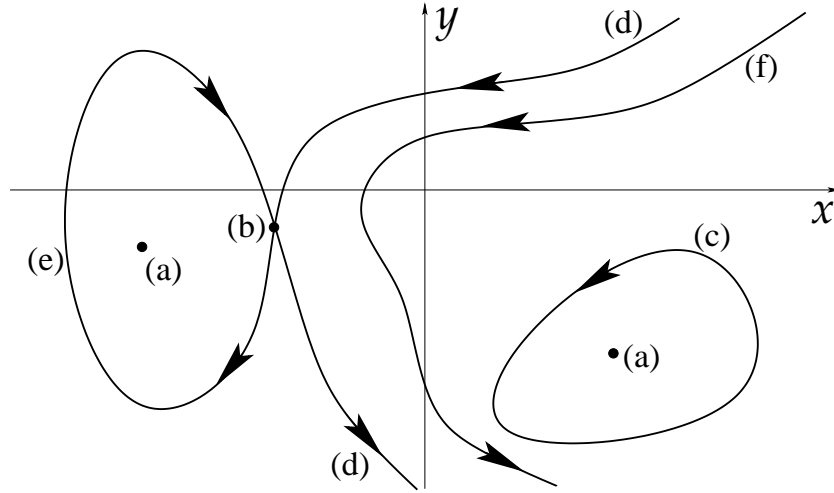


Figura 4.1. Alcuni comportamenti tipici delle orbite nel piano delle fasi.

4.1 Considerazioni generali

Iniziamo con qualche osservazione di carattere generale, con lo scopo di imparare a riconoscere alcune situazioni che possono verificarsi. Richiamiamo l'attenzione del lettore sul fatto che almeno per ora la discussione non pretenderà di essere esaustiva.

Il primo obiettivo sarà dare una descrizione qualitativa del comportamento del sistema tracciando le orbite sul piano delle fasi. Ad una tale figura si dà il nome *diagramma di fase*. I casi più semplici che si possano verificare sono riassunti in forma sintetica nella figura 4.1. Possiamo distinguere quattro tipi di orbite.

(i) *Punti di equilibrio*. Di questo abbiamo già parlato: sono quei punti che da soli costituiscono un'orbita, $(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$, e che si ritrovano risolvendo il sistema di equazioni

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

A questa categoria appartengono i punti (a) e (b) rappresentati in figura 4.1. Della dinamica nell'intorno dei punti di equilibrio descritta mediante l'approssimazione lineare abbiamo già parlato diffusamente nel capitolo 3. Il problema di come possa essere modificata la dinamica dalla presenza di termini non lineari è in gran parte da discutere.

(ii) *Orbite periodiche*. Diremo che un'orbita $(x(t), y(t))$ è periodica se vale $(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, con T fissato. Un tal comportamento è rappresentato nel piano delle fasi da una curva chiusa sulla quale il campo vettoriale non si annulla.¹ In tal caso, il teorema di esistenza ed unicità implica che non vi

¹ Con una breve riflessione il lettore si renderà conto immediatamente che una curva chiusa nel piano delle fasi sulla quale non vi siano punti di equilibrio corrisponde necessariamente ad un moto periodico. Infatti, il punto che rappresenta l'evoluzione del sistema non può arrestarsi, perché abbiamo supposto che sulla curva non vi siano punti di equilibrio, e quindi dopo un intervallo di tempo finito, che indicheremo con T , dovrà

possano essere altre orbite che la intersecano. Pertanto, un'orbita periodica nel piano delimita una regione invariante per il flusso: nessun'orbita può entrarvi, né ne può uscire. E' questo ad esempio il caso della curva (c) in figura 4.1.

(iii) *Orbite asintotiche ad un punto di equilibrio.* È il comportamento che abbiamo già visto per i punti di nodo, fuoco e sella nel caso delle equazioni lineari. In figura 4.1 è riportato l'esempio del punto (b), che corrisponde ad un punto di sella, e che viene raggiunto dalle orbite asintotiche indicate con (d) ed (e). Si possono verificare anche i casi del nodo o del fuoco, ovviamente, ma non li abbiamo riportati per evitare una figura troppo complessa. Richiamiamo però l'attenzione del lettore sul fatto che un'orbita può essere asintotica ad un punto di equilibrio sia nel passato che nel futuro. Ad esempio, la curva contrassegnata con (e) si richiude sul punto (b), ma non rappresenta un'orbita periodica.

È anche da sottolineare il fatto che nel disegno la curva rappresentata dall'unione dei tratti contrassegnati con (d) ed (e) e del punto contrassegnato con (b) sembra essere un'orbita che viola l'unicità della soluzione. In realtà la curva rappresenta quattro orbite distinte: la soluzione stazionaria (b), la curva entrante e quella uscente contrassegnate da (d), ed il cappio (e). Il carattere asintotico delle orbite salva l'unicità della soluzione rappresentata dal punto (b).

Più avanti vedremo che vi possono essere anche orbite asintotiche ad un'orbita periodica isolata, che costituisce un *ciclo limite*.

(iv) *Orbite aperte, che non sono asintotiche a nessun equilibrio.* È il caso dell'orbita contrassegnata con (f) in figura 4.1. Qui non c'è molto da aggiungere: il punto che rappresenta lo stato del sistema non fa che percorrerla nel tempo, senza tornare mai ad uno stato già visitato in precedenza, e senza intersecare nessuna delle altre orbite.

Come fatto generale l'identificazione dei punti di equilibrio costituisce il primo passo nello studio qualitativo di un sistema di equazioni differenziali nel piano. A questo segue lo studio della stabilità lineare dei punti, ricordando che, per il teorema di Lyapounov citato nel paragrafo 3.4.3, tale studio consente spesso di determinare anche la stabilità non lineare. Il passo successivo consiste nello studio delle orbite asintotiche a punti di nodo, fuoco o sella. Infine, si devono determinare le orbite periodiche. La conoscenza di questi elementi costituisce in pratica lo scheletro essenziale per la descrizione completa della dinamica. Nel caso del piano (o comunque di una superficie di dimensione 2) il completamento dell'analisi è facilitato dalla circostanza che ciascuna orbita costituisce di fatto una sorta di barriera insuperabile.

Nel caso di dimensione superiore a 2 (che in queste note non tratteremo se non riferendoci a modelli specifici) lo studio qualitativo si appoggia in prima battuta sugli stessi elementi, ma si rivela di fatto ben più complesso. Per dare un'idea molto vaga della difficoltà basti osservare che la proprietà che un'orbita periodica isola una regione

necessariamente raggiungere il punto di partenza. A partire da quel momento il punto non potrà che ripercorrere la stessa curva riprendendo ad ogni istante $T + t$ lo stesso stato che aveva al tempo t . In altre parole, $x(T + t) = x(t)$ qualunque sia t , che è la definizione di moto periodico di periodo T .

invariante viene subito meno: non si può escludere che vicino a quest'orbita ve ne sia una seconda che si richiude su se stessa solo dopo aver spiraleggiato più o meno a lungo attorno alla prima; e poi che attorno alla seconda ve ne sia una terza che si richiude dopo aver spiraleggiato attorno alla seconda; e poi che questo comportamento si ripeta per una quarta, una quinta orbita, e così via, *ad infinitum*; ed infine, non si può neppure escludere che in mezzo a questo guazzabuglio esistano delle orbite che continuano a girovagare senza richiudersi mai su se stesse. Questo è proprio quanto avviene, ad esempio, nel modello per cui è stata tracciata la figura 1.4.

4.2 Le costanti del moto

Come per il caso della stabilità, la conoscenza di variabili dinamiche che hanno un comportamento particolare può essere di grande utilità per lo studio qualitativo della dinamica. È questo il caso delle le costanti del moto, di cui vogliamo discutere in questo paragrafo. Consideriamo un dato iniziale $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$, ed un movimento $(x(t), y(t)) \in \mathcal{G}$ per $t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ generato dal sistema di equazioni differenziali (4.1).

Definizione 4.1: Diremo che una variabile dinamica $\Phi(x, y)$ è costante del moto se per ogni $t \in \mathcal{I}$ vale $\Phi(x(t), y(t)) = \Phi(x_0, y_0)$.

Supponiamo ora che la funzione $\Phi(x, y)$ sia di classe $C^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$. Vale allora la

Proposizione 4.2: Una variabile dinamica $\Phi(x, y)$ di classe $C^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ è costante del moto per il sistema (4.1) se e solo se vale

$$(4.4) \quad f \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 .$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(x(t), y(t))$. Allora vale

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \dot{y} = f \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} .$$

La tesi segue perché $\Phi(x, y)$ è costante del moto se e solo se $\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = 0$. Q.E.D.

La proposizione ci dà un modo semplice per verificare se una funzione sia costante del moto senza per questo dover integrare il sistema di equazioni differenziali, come la definizione sembrerebbe richiedere. Inoltre si può leggere la (4.4) come un'equazione alle derivate parziali per l'incognita Φ .

Veniamo all'uso delle costanti del moto. Definiamo il sottinsieme di \mathcal{G}

$$(4.5) \quad \Sigma_C = \{(x, y) \in \mathcal{G} : \Phi(x, y) = C\} .$$

Si verifica immediatamente che Σ_C è invariante per il flusso del sistema (4.1). In termini più precisi: se $(x_0, y_0) \in \Sigma_C$, e dunque $\Phi(x_0, y_0) = C$, allora tutta l'orbita uscente da (x_0, y_0) è contenuta in Σ_C . Su questa osservazione si fonda l'uso delle costanti del moto per tracciare il diagramma di fase: nota la funzione Φ , che sia regolare, basta tracciarne le curve di livello Σ_c , identificandone le eventuali singolarità; ogni curva di livello Σ_C è un insieme di orbite.

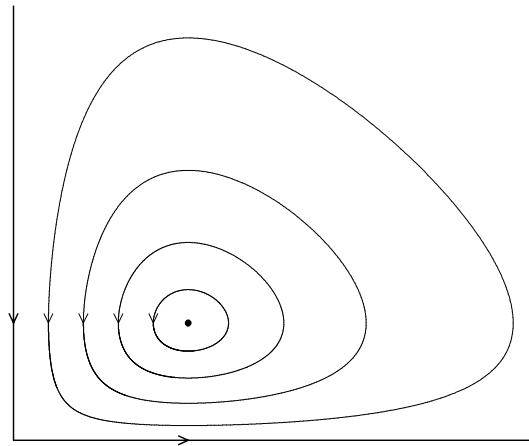


Figura 4.2. Il diagramma di fase per il sistema di Lotka–Volterra.

Un esempio servirà ad illustrare il procedimento. Consideriamo il sistema di Lotka–Volterra

$$(4.6) \quad \dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy.$$

Si verifica subito che il sistema ammette i due punti di equilibrio $(0, 0)$ (la morte totale, nel modello biologico) e $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ (la vita all’equilibrio biologico). È anche facile verificare che nell’approssimazione lineare il punto $(0, 0)$ è una sella, mentre il punto $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ è un centro. Infine, è utile osservare che gli assi delle ascisse e delle ordinate sono ambedue invarianti. Dunque possiamo ben limitarci a tracciare il diagramma di fase nel quadrante positivo del piano, che è quello interessante per il nostro modello (sarebbe difficile dare un significato ad una popolazione negativa).

Mostriamo ora che il sistema ammette una costante del moto. Eliminando il tempo tra le due equazioni (4.6) si ottiene l’equazione differenziale a variabili separabili

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \frac{\gamma - \delta x}{x} dx$$

che si integra immediatamente. Si conclude che

$$\Phi(x, y) = \gamma \log x - \delta x + \alpha \log y - \beta y$$

è una costante del moto. Le curve di livello sono riportate in figura 4.2. Le frecce che danno la direzione del flusso sono ricavate semplicemente guardando la direzione del campo vettoriale in un punto qualsiasi della curva.

Il comportamento qualitativo del sistema è ben descritto dal diagramma di fase, ma manca qualunque indicazione sulla legge oraria. Questa si può ricavare in generale col procedimento seguente. Consideriamo il sistema (4.1), e supponiamo di conoscere una costante del moto $\Phi(x, y)$ di classe $C^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$. Supponiamo che nel punto (x_0, y_0) una almeno delle derivate $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ non si annulli; ad esempio, sia $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Allora, per il teorema delle funzioni implicite, in un intorno di (x_0, y_0) si può risolvere rispetto a y l’equazione $\Phi(x, y) = C$, con $C = \Phi(x_0, y_0)$, e si trova una funzione $y = \varphi(x, C)$ soddisfacente $\varphi(x_0, C) = y_0$. Si può allora sostituire questa funzione nella prima delle

equazioni (4.1), ottenendo l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x, \varphi(x, C))$, che coinvolge la sola variabile x . A questa equazione si possono applicare le formule di quadratura che abbiamo visto nel paragrafo 2.1.2, ricavando così $x(t)$. La soluzione si completa semplicemente calcolando $y(t) = \varphi(x(t), C)$. Nei punti in cui $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$ si annulla, ma vale $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, si applica lo stesso procedimento scambiando le variabili x, y , e si arriva allo stesso risultato. Nulla si può dire invece dei punti in cui si annullano ambedue le derivate: tipicamente si tratta di punti di equilibrio, come avviene per la costante che stiamo considerando, oppure punti in cui la costante del moto è una funzione poco significativa.²

Si vede dunque come la conoscenza di una costante del moto ci permetta, in questo caso, di ricondurre il sistema alle quadrature. Questo giustifica il nome *integrale primo* che viene spesso dato ad una costante del moto. In effetti, per risolvere un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine ci si attende di dover ricorrere a due integrazioni. La conoscenza di una costante del moto corrisponde ad aver effettuata una *prima integrazione*, ed in effetti abbiamo visto che la soluzione completa del sistema richiede solo una seconda quadratura.

Il contenuto di questo paragrafo si applica in gran parte anche al caso di equazioni differenziali in dimensione superiore a 2. In effetti, sia data l'equazione $\dot{x} = f(x)$ con $x \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, e denotiamo ancora con $x(t)$ l'orbita con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$. Una variabile dinamica $\Phi(x)$ è costante del moto se $\Phi(x(t)) = \Phi(x_0)$ per tutti i tempi per cui è definito il flusso. La condizione della proposizione 4.2 si scrive $L_f \Phi = 0$, dove L_f è la derivata di Lie che abbiamo visto nel paragrafo 3.4.2. La definizione di Σ_C si riformula in modo banale. La sola differenza rilevante è che la conoscenza di una costante del moto non permette di determinare immediatamente l'orbita, diversamente da quanto avviene nel caso $n = 2$. In generale, se la funzione Φ è regolare si trova solo una superficie invariante di dimensione $n - 1$, che però contiene ancora un'infinità di orbite. Il processo che conduce eventualmente alla soluzione per quadrature richiede la conoscenza di ulteriori integrali primi, o costanti del moto. Lasciamo in sospeso questo punto, sul quale torneremo a tempo debito.

4.3 I sistemi conservativi

Veniamo ora a discutere il caso notevole dei sistemi conservativi. Vi rientra in particolare il caso di un sistema meccanico costituito da un punto su una retta, sul quale agisce una forza puramente posizionale. L'equazione di Newton si scrive

$$(4.7) \quad m\ddot{x} = F(x) ,$$

ovvero, come equazione nel piano delle fasi,

$$(4.8) \quad \dot{x} = v , \quad \dot{v} = \frac{F(x)}{m} .$$

² Ad esempio, la funzione $\Phi(x, y) = 13$, costante in tutto il dominio, è certamente una costante del moto regolare, ma non è interessante.

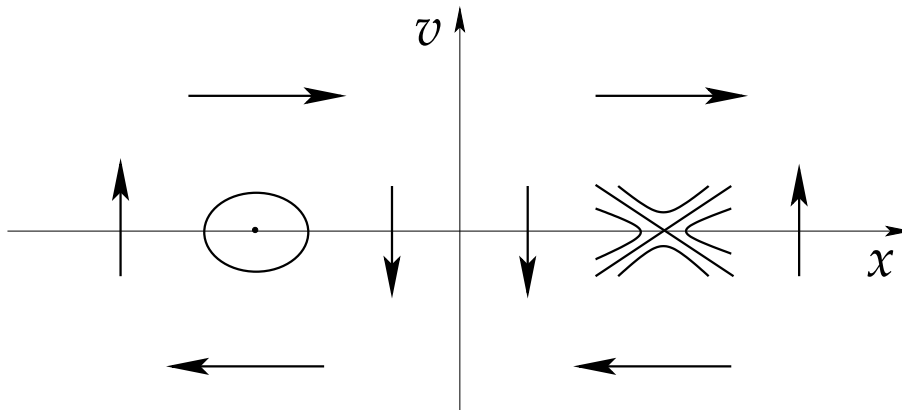


Figura 4.3. Le caratteristiche generali del flusso nel caso di un sistema conservativo ad un grado di libertà.

4.3.1 Rappresentazione delle orbite nel piano delle fasi

Premettiamo alcune considerazioni generali su come la forma particolare dell'equazione di Newton (4.8) possa influenzare a priori l'andamento delle orbite nel piano delle fasi. La figura 4.3 le illustra in modo sintetico.

- (i) La direzione del flusso è sempre verso destra nel semipiano superiore e verso sinistra nel semipiano inferiore. Ciò perché nel semipiano superiore x deve necessariamente crescere, essendo $\dot{x} = v > 0$, e nel semipiano inferiore deve necessariamente decrescere.
- (ii) I punti di equilibrio del sistema si trovano necessariamente sull'asse x . Ciò perché nei punti di equilibrio si devono annullare i secondi membri dell'equazione, e quindi si deve avere in particolare $v = 0$.
- (iii) Fatta eccezione per i soli punti di equilibrio, tutti gli altri punti dell'asse x vengono attraversati dalle orbite in direzione verticale. Ciò perché in quei punti la componente orizzontale del campo vettoriale, ossia v , si annulla, ed il campo vettoriale ha componente verticale non nulla essendo $F(x) \neq 0$ (altrimenti sarebbe un equilibrio).
- (iv) Nell'approssimazione lineare tutti i punti di equilibrio sono centri o selle, oppure casi degeneri in cui ambedue gli autovalori sono nulli. Ciò perché gli elementi diagonali della matrice Jacobiana del campo vettoriale sono nulli, e quindi la traccia della matrice è necessariamente nulla. Basta osservare il diagramma di biforcazione della figura 3.7 per verificare che l'affermazione è vera.

4.3.2 La conservazione dell'energia

Assumiamo che la forza $F(x)$ sia sufficientemente regolare da garantire l'esistenza della sua primitiva, ovvero di una funzione $V(x)$, detta *energia potenziale*, tale che

$$(4.9) \quad F = -\frac{dV}{dx} .$$

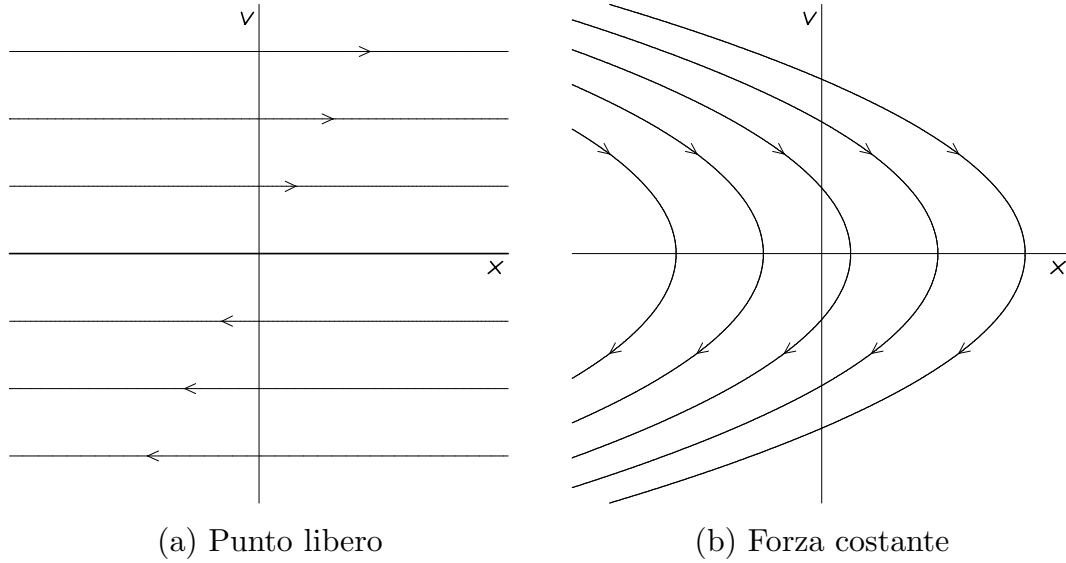


Figura 4.4. Il diagramma di fase per il punto libero, $m\ddot{x} = 0$, e per un campo di forza costante, come nel caso della gravità in una regione limitata della superficie terrestre, $\ddot{x} = -g$.

Riscriveremo dunque l'equazione di Newton nella forma

$$(4.10) \quad m\ddot{x} + V'(x) = 0.$$

Si osservi che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva.

Proposizione 4.3: *L'energia totale*

$$(4.11) \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

è una costante del moto per l'equazione di Newton.

La variabile dinamica $T = \frac{1}{2}mv^2$ viene detta *energia cinetica*.

Dimostrazione. Moltiplicando per \dot{x} l'equazione (4.10) si ottiene $m\ddot{x}\dot{x} + V'(x)\dot{x}$, e basta osservare che $m\ddot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)$, e $V'(x)\dot{x} = \frac{d}{dt}V(x)$. Dunque il membro di sinistra è la derivata totale rispetto al tempo della funzione E definita dalla (4.11).³ Q.E.D.

Veniamo ora all'uso della conservazione dell'energia per tracciare il diagramma di fase di alcuni sistemi interessanti.

(i) *Il punto libero.* Il modello è un punto materiale non soggetto a forze, descritto dall'equazione $\ddot{x} = 0$. L'energia potenziale è dunque costante, e possiamo ben assumerla nulla. La conservazione dell'energia si scrive $\frac{1}{2}mv^2 = E$. Il diagramma di fase

³ Una deduzione meno legata ai procedimenti tipici della Meccanica, ma sostanzialmente equivalente, è la seguente. Si elimina il tempo tra le due equazioni (4.8), riscrivendole come equazione a variabili separabili $mv dv = F(x) dx$, e si integra introducendo la costante di integrazione E .

è rappresentato in figura 4.4(a). L'asse x è formato esclusivamente da punti di equilibrio. Per ogni valore $E > 0$ assegnato⁴ si trovano due rette orizzontali distinte, una nel semipiano superiore, corrispondente ad un movimento del punto verso destra con velocità positiva costante $v = \sqrt{2E/m}$, ed una nel semipiano inferiore che corrisponde al moto verso sinistra con velocità $v = -\sqrt{2E/m}$. Non c'è molto da aggiungere, se non che l'equazione è lineare, e corrisponde, a meno di una trasformazione di coordinate elementare, al caso degenero trattato alla fine del paragrafo 3.2.5, equazione (3.35).

(ii) *La caduta dei gravi.* Il moto avviene lungo la verticale con accelerazione costante indipendente dalla massa del punto. Se l'asse x è diretto verso l'alto l'equazione di Newton si scrive $m\ddot{x} = -mg$, ovvero, dividendo per m ambedue i membri, $\ddot{x} = -g$. L'energia è $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$. Non vi sono punti di equilibrio, e per E arbitrario la curva di livello corrispondente è una parabola simmetrica rispetto all'asse x . Il diagramma di fase è rappresentato in figura 4.4(b). È evidente il comportamento qualitativo: se si parte con un dato iniziale qualsiasi nel semipiano superiore il punto raggiunge un'altezza massima determinata dall'intersezione della parabola con l'asse x , e poi viene respinto all'indietro, ricadendo verso il basso. Il caso di un punto lasciato cadere liberamente partendo da fermo corrisponde ad un dato iniziale sull'asse x .

(iii) *L'oscillatore armonico.* Si rappresenta idealmente come un punto materiale in moto su una retta e soggetto ad una forza elastica di richiamo verso l'origine – idealizzazione di una molla. L'equazione è $m\ddot{x} + kx = 0$, ovvero, dividendo per m ambedue i membri, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, con $\omega^2 = k/m$. L'energia è $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. L'origine è il solo punto di equilibrio, che secondo la classificazione del paragrafo 3.2 è un centro. Le orbite sono delle ellissi con centro nell'origine, rappresentate in figura 4.5(a). Il moto è dunque periodico.

L'oscillatore armonico ha anche un'ulteriore caratteristica: l'*isocronismo delle oscillazioni*. Ciò si vede immediatamente dalla forma della soluzione $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, che il lettore potrà facilmente costruire con il metodo generale discusso nel paragrafo 3.2.4. Le costanti A (ampiezza) e φ (fase iniziale) saranno determinate mediante i dati iniziali. L'isocronismo risulta evidente dal fatto che la frequenza angolare ω è indipendente dai dati iniziali, ed in particolare dall'ampiezza. Vedremo tra breve che in generale una correzione non lineare dell'equazione, ottenuta ad esempio tenendo conto di una non perfetta elasticità della forza, ha come primo effetto la perdita dell'isocronismo.

(iv) *Il repulsore armonico.* Si rappresenta, in modo simile all'oscillatore, come un punto materiale in moto su una retta e soggetto ad una forza elastica che lo respinge dall'origine. L'equazione è $m\ddot{x} - kx = 0$, ovvero, dividendo per m ambedue i membri, $\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$, con $\lambda^2 = k/m$. L'energia è $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2$. L'origine è il solo punto

⁴ Non stupisca il fatto che si debbano considerare solo valori positivi di energia: l'energia cinetica non può essere negativa, e il contributo dell'energia potenziale è nullo perché tale l'abbiamo scelto. Nessun dato iniziale può corrispondere ad un'energia negativa. Per $E = 0$ si ritrova solo l'asse x .

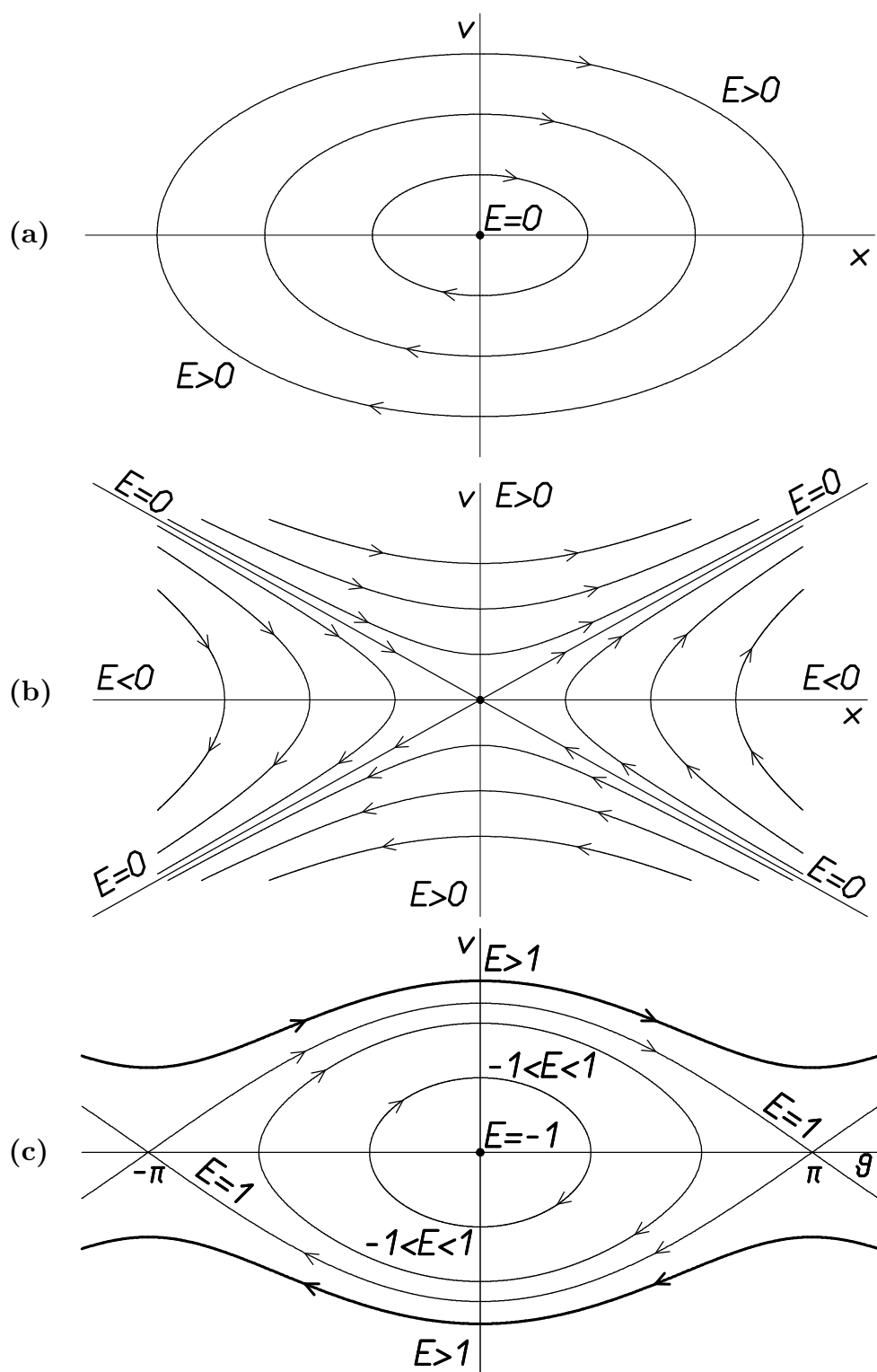


Figura 4.5. I diagrammi di fase per tre sistemi: (a) l'oscillatore armonico, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, (b) il repulsore armonico, $\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$, (c) il pendolo, $\ddot{\vartheta} + \sin \vartheta = 0$.

di equilibrio, che secondo la classificazione del paragrafo 3.2 è una sella. Il lettore osserverà che il diagramma di fase, rappresentato in figura 4.5(b), si ottiene da quello della figura 3.2 mediante una trasformazione lineare, qui di fatto una rotazione di $\pi/4$ ed una contrazione lungo la direzione v . Per $E = 0$ si ritrovano le rette invarianti $y = \pm\lambda x$, che rappresentano in realtà cinque orbite distinte: la soluzione stazionaria $x = 0$, due soluzioni entranti e due soluzioni uscenti asintoticamente nel/dal punto di equilibrio. Le semirette uscenti vengono dette *varietà instabili* del punto di equilibrio; quelle entranti vengono dette *varietà stabili*. Per $E \neq 0$ le orbite sono delle iperboli asintotiche alle varietà stabili ed instabili.

È interessante osservare che la regione del piano di fase corrispondente a $E < 0$ descrive dei movimenti per cui il punto materiale si muove verso l'origine, ma ne viene respinto, per cui si arresta, cambia il verso del movimento e torna verso l'infinito da cui era venuto. Per $E > 0$ invece il punto supera l'origine, ivi raggiungendo la sua velocità minima (ma non nulla), e procede la sua corsa verso l'infinito. Per $E = 0$ le varietà stabili ed instabili fanno da *separatrici* tra i due tipi di comportamento.

(iv) *Il pendolo*. È l'idealizzazione di un punto materiale sospeso un'asticella incernierata in un punto fisso. Si assume che l'asticella sia priva di massa, e perfettamente rigida ed inestensibile, e che il moto possa avvenire solo nel piano verticale, sotto l'azione della sola gravità. L'equazione si scrive, nella sua forma più semplice, $\ddot{\vartheta} + \sin \vartheta = 0$, dove ϑ rappresenta l'angolo formato dalla direzione dell'asticella che sorregge la massa rispetto alla verticale. Rispetto ai casi discussi fin qui occorre osservare che lo spazio delle configurazioni, che descrive le sole posizioni del punto materiale, e non la sua velocità, è una circonferenza. Lo spazio delle fasi viene descritto più propriamente da un cilindro che da un piano. Di ciò si tiene conto considerando come equivalenti tutti i valori di ϑ che differiscono tra loro per multipli di 2π . In pratica occorrerà considerare solo funzioni della coordinata ϑ che siano periodiche di periodo 2π . L'energia si scrive $E = \frac{1}{2}v^2 - \cos \vartheta$, dove $v = \dot{\vartheta}$ è la velocità angolare.

Il sistema ammette un'infinità di punti di equilibrio, che di fatto si riducono a due se si tiene conto della periodicità di ϑ , e precisamente $\vartheta = 0$, il punto di equilibrio inferiore, e $\vartheta = \pi$, il punto di equilibrio superiore. Nell'approssimazione lineare questi due punti sono rispettivamente un centro ed una sella. Il diagramma di fase completo si ottiene rappresentando le curve di livello dell'energia, come in figura 4.5. Gli elementi interessanti sono: il punto di equilibrio per $E = -1$; le curve chiuse corrispondenti a moti periodici di oscillazione intorno all'equilibrio per $-1 < E < 1$; le *separatrici* che corrispondono a moti asintotici sia nel passato che nel futuro al punto di equilibrio superiore per $E = 1$; i moti periodici a carattere rotatorio per $E > 1$.

4.3.3 Analisi qualitativa generale

Un utile complemento alla rappresentazione sul diagramma di fase può essere l'analisi qualitativa fondata sulla conservazione dell'energia. Ci riferiamo sempre ad un punto materiale su una retta, o comunque su una varietà di dimensione 1, soggetto ad un'energia potenziale fissata di cui non ci importa la forma esplicita, ma solo l'andamento qualitativo. L'osservazione cruciale è la seguente: *per fissata energia il*

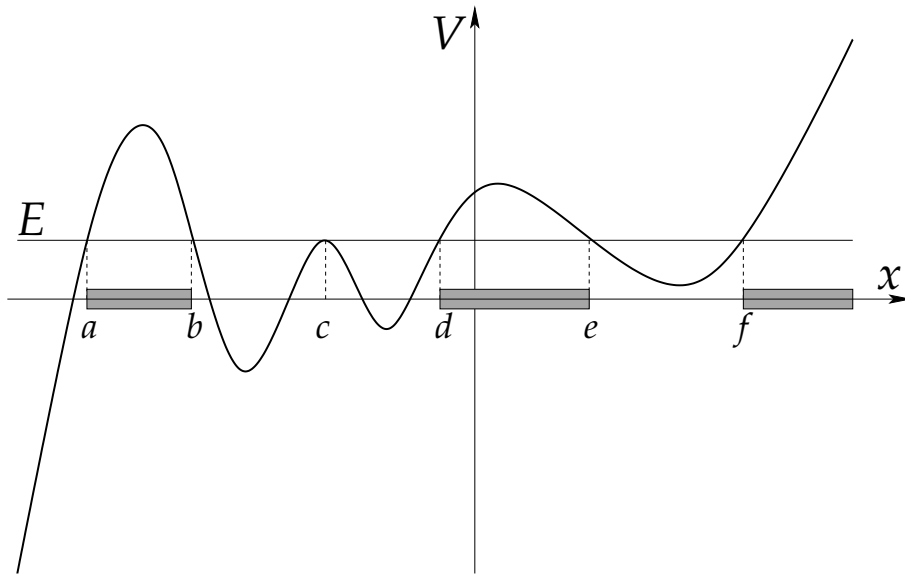


Figura 4.6. Regioni permesse e proibite per il moto di un punto soggetto ad un'energia potenziale, ad energia totale E fissata.

moto è possibile solo in quei sottinsiemi della retta caratterizzati dalla condizione $E \geq V(x)$. Il motivo è semplice: l'energia totale è la somma di energia cinetica e potenziale, $E = T + V$; l'energia cinetica non può essere negativa, $T \geq 0$. Dunque deve essere $E - V \geq 0$.

La figura 4.6 illustra le situazioni più semplici, ma anche più comuni. Assegnata la forma del potenziale ed il valore dell'energia si determinano gli intervalli soddisfacenti la condizione $E \geq V(x)$; in figura sono gli intervalli $x \leq a$, $b \leq x \leq d$ e $e \leq x \leq f$. Il complemento di questi intervalli, mascherato in grigio nella figura, non è raggiungibile dal punto materiale, che quindi non può passare da un intervallo consentito all'altro.

Considerando gli intervalli connessi rappresentati in figura possiamo immaginare i casi seguenti:

- (i) Un intervallo infinito a sinistra o a destra, come nel caso $x \leq a$ in figura: il punto può provenire dall'infinito, e la sua velocità si annulla nel punto a , dove però non può arrestarsi perché la sua accelerazione non è nulla (la derivata dell'energia potenziale non è zero, e quindi a non è un equilibrio); in quel punto il moto si inverte ed il punto torna all'infinito. È questo il caso dell'intervallo $e \leq x \leq f$ in figura.
- (ii) Un intervallo chiuso i cui estremi non siano punti di equilibrio, e tale che al suo interno si abbia strettamente $E > V(x)$. In tal caso il punto non può che oscillare con moto periodico tra i due estremi, perché gli estremi, non essendo equilibri, sono punti di inversione del movimento.
- (iii) Un intervallo che al suo interno abbia almeno un punto in cui $E = V(x)$. È questo il caso del punto c , interno all'intervallo $b \leq x \leq d$. In questo caso c è un equilibrio. Il comportamento dell'equilibrio dipende dalla regolarità del potenziale in quel punto. Se la sua derivata soddisfa la condizione di Lipschitz

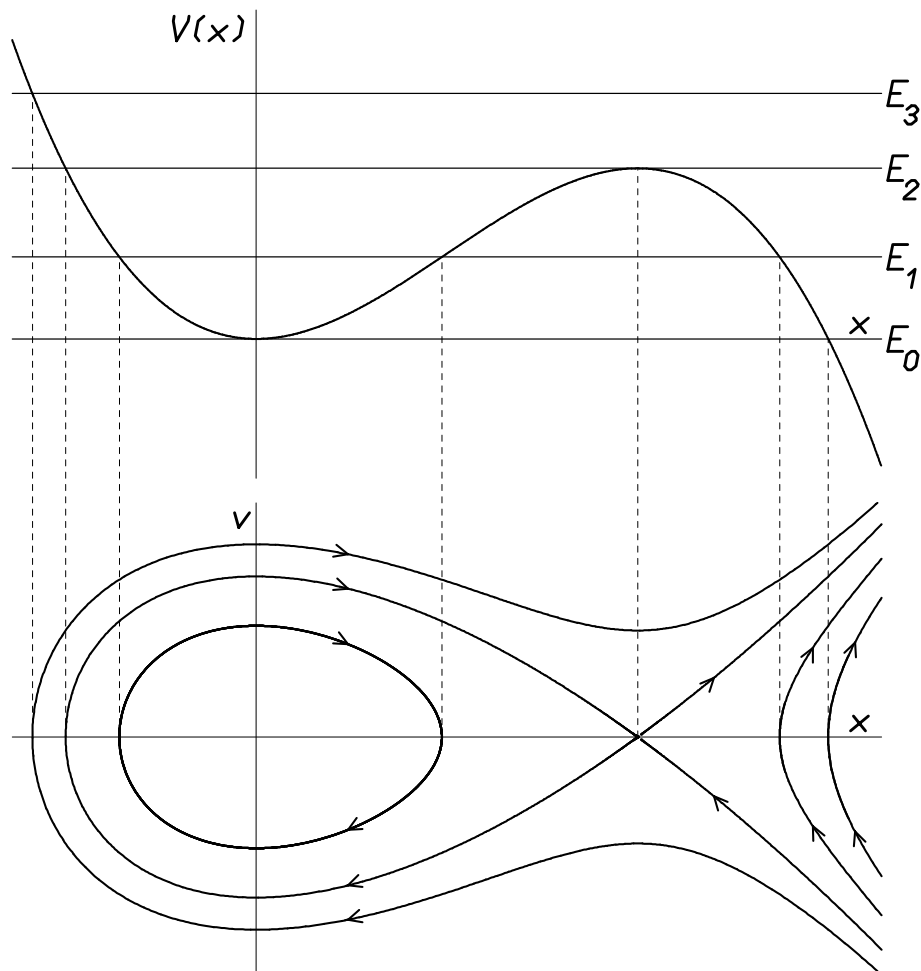


Figura 4.7. Il grafico del potenziale ed il diagramma di fase per il potenziale $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

allora l'intervallo si spezza in due sottointervalli semiaperti $b \leq x < c$ e $c < x \leq d$ in cui il punto rimane confinato, senza poter raggiungere né superare l'equilibrio. Il movimento è asintotico, e non periodico. Se il potenziale non è sufficientemente regolare, tutto è da discutere.

Le considerazioni qualitative che abbiamo fatto possono ben essere rafforzate e completate ricorrendo al diagramma di fase. Più che discussioni di carattere generale è utile fare un esempio. Consideriamo l'energia potenziale della forma $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Con un rapido calcolo, annullando la derivata di $V(x)$, si vede che ci sono due punti di equilibrio in $x = 0$ con $V(0) = 0$, che è un minimo, e $x = 1$ con $V(1) = 1/6$, che è un massimo. Non vi sono altri punti di equilibrio. La figura 4.7 riporta nella parte superiore il grafico del potenziale, e nella parte inferiore il diagramma di fase con le orbite corrispondenti a quattro valori assegnati di energia. Con termine suggestivo, si dice che c'è una *bucca di potenziale* con minimo in $x = 0$. Il valore E_0 corrisponde al minimo locale in $x = 0$. Il valore E_2 corrisponde al massimo locale in $x = 1$. Gli altri due valori sono presi in modo da mettere in evidenza i moti confinati nella buca di

potenziale, che hanno energia intermedia tra E_0 ed E_2 , e quelli che non sono confinati, con energia superiore ad E_2 . Le linee tratteggiate mostrano come i punti in cui si annulla l'energia cinetica determinino gli estremi di oscillazione o, nel caso di un punto di annullamento della derivata del potenziale, i punti di equilibrio.

Osservando la figura 4.7 dovrebbe essere chiaro come tracciare il diagramma di fase per un'energia potenziale assegnata come funzione della coordinata x , che abbia un andamento qualsiasi purché regolare. Basta identificare i punti di equilibrio, che altro non sono che i punti ove la derivata dell'energia potenziale si annulla, ed identificare le buche che si formano intorno ai minimi locali e le separatrici che si formano in corrispondenza ai punti di massimo isolati. È utile anche osservare che il diagramma di fase è certamente simmetrico rispetto all'asse x ; ciò perché l'energia dipende quadraticamente dalla velocità, e quindi vale $E(x, -v) = E(x, v)$.

Esercizio 4.1: Tracciare il diagramma di fase per i casi seguenti:

$$\begin{array}{ll}
 V(x) = \frac{x^3}{3} ; & V(x) = \frac{x^4}{4} ; \\
 V(x) = -\frac{x^4}{4} ; & V(x) = -\frac{3}{4}x^{4/3} \\
 V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} ; & V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{4/3} ; \\
 V(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} ; & V(x) = e^{-x^2}(2x + 1) ; \\
 V(x) = -\omega^2 x - \frac{\Omega^2}{2} \sin^2 x ; & V(x) = \omega^2 \cos x - \alpha x ; \\
 V(x) = x^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} - 1 \right) ; & V(x) = -x^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - 1 \right) ; \\
 V(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} , x > 0 . &
 \end{array}$$

4.3.4 La riduzione alle quadrature

La conoscenza dell'integrale dell'energia ci mette a disposizione anche un metodo di riduzione del sistema alle quadrature. In effetti risolvendo rispetto a \dot{x} l'equazione

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$$

otteniamo l'equazione a variabili separabili

$$(4.12) \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} .$$

È spontaneo osservare che questa è un'equazione della forma $\dot{x} = f(x)$ che abbiamo discusso in dettaglio nel paragrafo 2.1.2, e che quindi basta applicare la formula di

quadratura (2.6). Scriveremo dunque la soluzione come

$$(4.13) \quad \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\pm \sqrt{E - V(\xi)}} = t - t_0 ,$$

con la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$.

A ben guardare però questa formula non è completamente comprensibile: occorre almeno precisare come intervenga la scelta della velocità iniziale, che nella formula non compare affatto, e quale segno si debba assegnare al primo membro.

Per comprendere come si debba utilizzare la formula di quadratura (4.13) è utile riferirsi al diagramma di fase. Fissiamo le condizioni iniziali assegnando la posizione x_0 ed il valore dell'energia, che dovrà soddisfare $E \geq V(x_0)$ — altrimenti il punto materiale non potrebbe trovarsi in x_0 . Ricaviamo poi la velocità iniziale v_0 dall'equazione dell'energia; il lettore osserverà che v_0 è determinata a meno del segno, per la simmetria del diagramma di fase rispetto all'asse x . Dovremo dunque completare le informazioni sui dati iniziali specificando anche il segno della velocità.⁵

Considereremo due casi tipici. Supponiamo di aver scelto $E > V(x_0)$ e di aver determinato $v_0 \neq 0$. Supponiamo anche che l'energia potenziale $V(x)$ sia almeno continua e che sia tale da consentire il prolungamento della soluzione per tutti i tempi. Come primo caso supponiamo che $E - V(x)$ non si annulli in nessun punto dell'asse reale, e dunque non cambi mai segno. La formula di quadratura determina di fatto

⁵ Qui dobbiamo sbarazzarci subito di una difficoltà subdola. Fissiamo le condizioni iniziali scegliendo x_0 arbitrario, e $E = V(x_0)$. Se sostituiamo questi dati nel secondo membro della (4.12) vediamo immediatamente che per questa equazione x_0 è un equilibrio. Se tentiamo un'analisi più approfondita ci rendiamo conto che in quel punto il secondo membro della (4.12) non soddisfa la condizione di Lipschitz, e che la soluzione di equilibrio non è unica: viene raggiunta in un tempo finito, poi il punto può restarci per un tempo indeterminato fin che decide di staccarsene e proseguire il suo cammino. Ancor più sconcertante, questo accade per *qualunque* posizione x_0 , sotto la sola condizione che si annulli la velocità. Per fare un esempio meccanico, se sospendessi un oggetto ad un'altezza qualunque, ed improvvisamente tagliassi il filo che lo sostiene, quello potrebbe restare un po' di tempo sospeso nell'aria senza accorgersi di nulla, e poi, rendendosi conto improvvisamente che gli è mancato il sostegno, precipitare rovinosamente — una scena che abbiamo visto spesso nei cartoni animati, ma mai nella realtà. Il motivo di questa bizzarria è da ricercarsi nella riduzione che abbiamo operato, utilizzando l'energia per esprimere la velocità come funzione della posizione. In effetti, l'orbita nel piano delle fasi è definita in modo *implicito* dall'equazione dell'energia. Se $E = V(x_0)$, allora nel punto $(x_0, 0)$ cadono le condizioni che consentono di ricavare v come funzione di x , perché la derivata $\frac{\partial E}{\partial v}$ si annulla. Se si annulla anche $\frac{\partial E}{\partial x}$ si tratta di un punto di equilibrio. Altrimenti si dovrebbe, in linea di principio, esprimere x come funzione di v invertendo l'equazione dell'energia, e risolvere l'equazione a variabili separabili $\dot{v} = \frac{1}{m}F(x(v))$. Quest'ultima equazione contiene l'informazione che l'accelerazione non si annulla per $v = 0$, sicché il paradosso viene eliminato. Di fatto si possono evitare tutte queste sgradevoli incombenze: basta seguire il procedimento indicato nel testo ignorando la soluzione di equilibrio spuria.

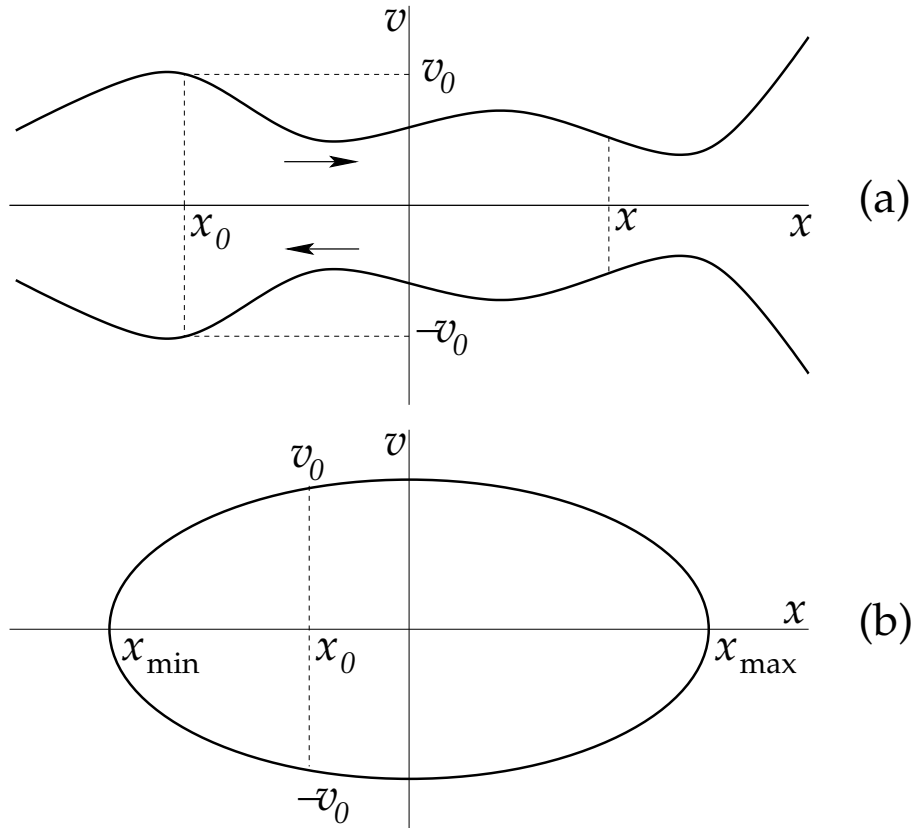


Figura 4.8. Il procedimento di calcolo della soluzione per quadrature usando la conservazione dell'energia.

due soluzioni: una con velocità positiva, che indichiamo con $(x(t), v(t))$; la seconda con velocità negativa, che si ottiene dalla prima per inversione temporale: $(x(-t), -v(t))$; come dire che la seconda orbita non è che la proiezione alla rovescia del filmato della prima. Questa situazione è rappresentata in figura 4.8(a): le due soluzioni sono rappresentate dalle due orbite simmetriche rispetto all'asse, che vengono percorse in senso opposto. In questo caso il problema è completamente risolto.

Supponiamo invece che esista un intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$ contenente x_0 , e tale che $E - V(x)$ si annulli solo agli estremi, ma che gli estremi non siano punti di equilibrio. Una tal situazione è rappresentata in figura 4.8(b). In questo caso potremmo comunque costruire l'intera soluzione a pezzi, come segue:

- (i) supponendo di aver scelto v_0 positivo calcoliamo

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{E - V(\xi)}} = t - t_0$$

per $x_0 \leq x \leq x_{\max}$ ed indichiamo con t_1 il tempo (certamente finito) per cui il punto raggiunge l'estremo x_{\max} ;

- (ii) teniamo conto dell'inversione della velocità invertendo il segno del radicando, e

proseguiamo calcolando

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\max}}^x \frac{d\xi}{-\sqrt{E - V(\xi)}} = t - t_1$$

facendo decrescere x fino a x_{\min} (del cambiamento di segno della velocità si tiene conto nella scelta degli estremi di integrazione), e denotiamo con t_2 il tempo a cui il punto raggiunge l'estremo x_{\min} ;

(iii) riprendiamo l'integrazione calcolando

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\min}}^x \frac{d\xi}{\sqrt{E - V(\xi)}} = t - t_2$$

lasciando crescere di nuovo x fino a x_{\max} , che verrà raggiunto ad un tempo t_3 ; e così via, fino al tempo che vogliamo. Otteniamo così il tempo t come funzione monotona crescente di x , e dunque potremo effettuare un'inversione per determinare $x(t)$.

Il lettore accorto si sarà reso conto, naturalmente, che è di fatto inutile eseguire tutti i calcoli indicati: in effetti, basta eseguire l'integrazione al punto (iii), e quindi determinare completamente la dinamica quando il punto percorre il segmento $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Il movimento di ritorno si ottiene semplicemente per inversione temporale, e dal momento in cui il punto è tornato in x_{\min} il resto del movimento non è altro che la ripetizione dell'oscillazione precedente: il moto, come ben sappiamo, è periodico, e la simmetria ci permette di conoscere tutto il movimento pur calcolando solo metà dell'orbita.

Il procedimento che abbiamo spiegato si modifica in modo ovvio se l'intervallo su cui si può eseguire l'integrazione si estende all'infinito in una delle due direzioni. Se invece uno degli estremi è un equilibrio, allora si deve controllare se esso venga raggiunto in tempo finito (il che può ben accadere se la derivata dell'energia potenziale non soddisfa la condizione di Lipschitz) o infinito (il movimento tende asintoticamente all'equilibrio, nel passato o nel futuro). Questo è da discutere caso per caso.

Esercizio 4.2: Si consideri un punto soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x) = x^3$, ed un movimento $x(t)$ che abbia luogo ad energia nulla. Partendo con il dato iniziale (x_0, v_0) si calcoli il tempo necessario affinché il punto raggiunga l'equilibrio $x = 0$. Si generalizzi il problema al caso di un potenziale generico che abbia un punto di flesso a tangente orizzontale.

Esercizio 4.3: Sia $V(x)$ un'energia potenziale di classe C^2 che ammetta un punto di massimo \bar{x} . Si mostri che il tempo di percorrenza lungo la separatrice corrispondente è infinito. Più precisamente, posto $E = V(\bar{x})$ si mostri che il tempo necessario perché il punto percorra il tratto compreso tra un dato iniziale x_0 ammissibile ed il punto di massimo \bar{x} è infinito.

4.3.5 L'approssimazione armonica per il periodo di oscillazione

Nel caso di un movimento confinato in una buca di potenziale è interessante conoscere il periodo, o la frequenza, di oscillazione. Il calcolo è agevole se si considerano solo oscillazioni di piccola ampiezza e ci si accontenta di un risultato approssimato.

Supponiamo che l'energia potenziale $V(x)$ sia almeno di classe $C^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$, e che abbia un minimo stretto in \bar{x} con $V''(\bar{x}) > 0$. Sotto queste ipotesi, esiste un intervallo di valori dell'energia, diciamo $V(\bar{x}) < E < E^*$ con E^* opportuno, per cui il movimento è confinato in un intervallo intorno a $V(\bar{x})$. Allora possiamo scrivere lo sviluppo di Taylor

$$V(x) = V(\bar{x}) + (x - \bar{x})V'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 V''(\bar{x}) + o((x - \bar{x})^2).$$

Ora, $V(\bar{x})$ è una costante che può essere ignorata (l'energia potenziale stessa è definita a meno di una costante), e $V'(\bar{x}) = 0$ perché \bar{x} è un punto di equilibrio. Possiamo dunque approssimare l'energia potenziale con la sua parte quadratica, e scrivere l'energia come

$$E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{V''(\bar{x})}{2}(x - \bar{x})^2.$$

Otteniamo così l'espressione dell'energia di un oscillatore armonico (che abbiamo già scritto al punto (iii) del paragrafo 4.3.2). Da qui ricaviamo immediatamente la frequenza angolare ed il periodo di oscillazione

$$(4.14) \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(\bar{x})}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(\bar{x})}}.$$

L'esempio classico è il calcolo del periodo per un pendolo di lunghezza l assegnata. L'equazione è $\ddot{\vartheta} = \frac{g}{l} \sin \vartheta$, dove g è l'accelerazione di gravità, e l'energia si scrive

$$(4.15) \quad E = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta), \quad V(\vartheta) = -\frac{g}{l} \cos \vartheta.$$

Applicando la formula (4.14) al punto di equilibrio stabile $\vartheta = 0$ si ricava immediatamente la formula approssimata per il periodo

$$(4.16) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Un procedimento alternativo consiste nel partire direttamente dall'equazione di Newton

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\frac{V'(x)}{m}.$$

A tal fine si linearizza il sistema nell'intorno di un punto $(\bar{x}, 0)$ tale che $V'(\bar{x}) = 0$. Ricordando che in un intorno di \bar{x} vale $V'(x) = (x - \bar{x}) V''(\bar{x}) + o(x - \bar{x})$ otteniamo il sistema lineare

$$\frac{d}{dt}(x - \bar{x}) = y, \quad \frac{d}{dt}y = -(x - \bar{x}) V''(\bar{x}).$$

Con una traslazione di coordinate $X = x - \bar{x}$, $Y = y$ possiamo ridurre il sistema alla forma usuale

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V''(\bar{x})}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

Se \bar{x} è un punto di massimo, ossia $V''(\bar{x}) < 0$, allora la matrice A ha due autovalori reali e distinti $\pm \sqrt{-V''(\bar{x})/m}$, e l'equilibrio è un punto di sella. Le separatrici del

sistema lineare sono determinate dai due autovettori, e sono le rette $Y = \pm \sqrt{\frac{-V''(\bar{x})}{m}} X$, che nelle variabili originarie si scrivono $y = \pm \sqrt{\frac{-V''(\bar{x})}{m}} (x - \bar{x})$. Le separatrici del sistema non lineare originario sono tangenti nell'origine a queste due rette.

Se invece \bar{x} è un punto di minimo, ossia $V''(\bar{x}) > 0$, allora la matrice A ha due autovalori immaginari puri $\pm i\omega = \pm i\sqrt{V''(\bar{x})/m}$. Come abbiamo visto nei paragrafi 3.2.4 e 4.3.2 il movimento del sistema lineare è dato da $X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, con costanti A, φ arbitrarie. Dunque ω rappresenta la pulsazione, o frequenza angolare, del movimento, e $T = 2\pi/\omega$ è il periodo valutato mediante l'approssimazione lineare.

Esercizio 4.4: Calcolare il periodo di oscillazione nell'approssimazione armonica per i punti di minimo delle energie potenziali dell'esercizio 4.1.

4.3.6 Il calcolo del periodo mediante una quadratura

Il calcolo esplicito del periodo di oscillazione come funzione dell'ampiezza si può svolgere grazie alla formula di quadratura (4.12). In effetti, avendo determinato l'intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$ di oscillazione, e tenendo conto della simmetria dell'orbita, il periodo si può calcolare come il doppio del tempo necessario perché il punto passi dall'estremo x_{\min} all'estremo opposto x_{\max} , ossia

$$(4.17) \quad T = \sqrt{2m} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Come esempio calcoliamo esplicitamente il periodo di oscillazione del pendolo. Dall'espressione (4.15) dell'energia ricaviamo

$$T = 2 \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{E + \frac{g}{l} \cos \vartheta}},$$

dove ϑ_0 è l'ampiezza dell'oscillazione ad energia E fissata, $-\frac{g}{l} < E < \frac{g}{l}$, determinata dall'equazione $E = \frac{g}{l} \cos \vartheta_0$. È conveniente sostituire direttamente questa espressione nell'integrale, e tener conto anche della simmetria del potenziale rispetto allo zero, $V(-\vartheta) = V(\vartheta)$; si ottiene

$$T = \sqrt{\frac{8l}{g}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}}.$$

Malgrado la sua apparenza innocua, questo integrale non si calcola con metodi elementari: lo si riconduce invece ad un integrale ellittico nel modo seguente. Si ricorre alla formula trigonometrica $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, e si scrive

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}.$$

Poi si esegue la trasformazione di variabile

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

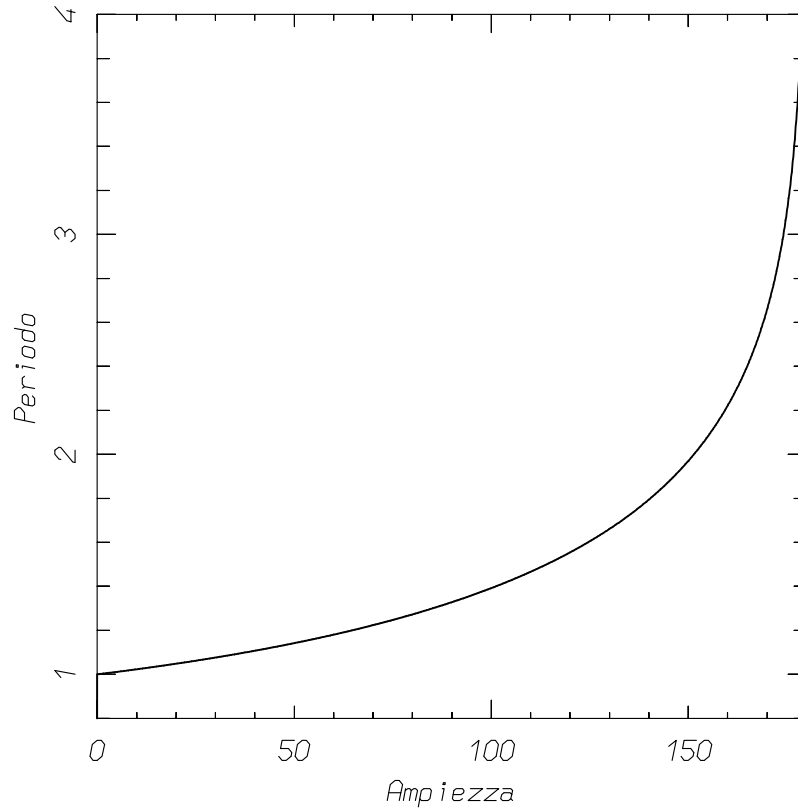


Figura 4.9. Il grafico del rapporto tra il periodo T di oscillazione del pendolo ed il periodo $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ calcolato mediante l'approssimazione armonica. L'ampiezza è misurata in gradi.

da cui si ricava

$$d\vartheta = \frac{2 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi .$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene

$$(4.18) \quad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\vartheta_0}{2}\right) ,$$

dove

$$(4.19) \quad K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} , \quad 0 \leq m < 1$$

è detto *integrale ellittico completo di prima specie*. I valori numerici di questo integrale come funzione di $m = \sin \frac{\vartheta_0}{2}$ o direttamente di ϑ_0 si trovano nelle tavole numeriche, ad esempio in [1].

Può essere interessante vedere come si possa almeno ottenere uno sviluppo in serie dell'integrale ellittico valido per valori non troppo grandi dell'argomento m . Si

sviluppa l'integrando in serie di potenze utilizzando la formula del binomio di Newton⁶

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k .$$

La serie è convergente per $|x| < 1$, e si può integrare termine a termine (si ricordi la proposizione 2.6). Ponendo $x = m^2 \sin^2 \varphi$ ed inserendo lo sviluppo in serie nella (4.19) si ottiene

$$K(m) = J_0 + \frac{1}{2}m^2 J_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}m^4 J_4 + \dots = \sum_{k \geq 0} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} m^{2k} J_{2k} ,$$

dove

$$J_{2k} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \varphi \, d\varphi .$$

Questo ultimo integrale si calcola per ricorrenza, poiché

$$J_0 = \frac{\pi}{2} , \quad J_{2k} = \frac{2k-1}{2k} J_{2k-2} .$$

Si ottiene infine

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{9}{64}m^4 + \dots \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 m^{2k} .$$

Questa formula può essere utile per valori non troppo grandi dell'ampiezza. Per ampiezze ϑ_0 che si avvicinano a π occorrono formule di approssimazione più adatte. A noi basta far uso di questa formula per avere un'idea della bontà dell'approssimazione armonica per piccole ampiezze. A tal fine utilizziamo lo sviluppo della funzione seno

$$m = \sin \frac{\vartheta_0}{2} = \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{\vartheta_0^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots$$

e combinando le formule che abbiamo ricavato otteniamo l'approssimazione

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \vartheta_0^2 + \dots \right) ,$$

dove il primo termine trascurato è di ordine ϑ_0^4 . Vediamo dunque che per ampiezze inferiori a 4×10^{-2} , che corrisponde a circa 2° , la differenza tra il periodo armonico e quello reale è dell'ordine di $1/10\,000$.

⁶ Qui abbiamo usato la notazione del semifattoriale: se n è pari (dispari) $n!!$ denota il prodotto dei numeri pari (dispari) fino a n compreso; inoltre si definisce $0!! = 1$.

In figura 4.9 è rappresentato il rapporto T/T_0 tra il periodo T del pendolo calcolato con la formula (4.18) ed il periodo T_0 dato dall'approssimazione armonica (4.16).⁷ Si osservi bene la scala verticale: per raddoppiare il periodo rispetto a quello armonico bisogna raggiungere ampiezze di oscillazione di circa 160° . Poi la curva del periodo si impenna, e tende ad infinito quando l'ampiezza tende a 180° . In effetti, tale ampiezza corrisponde alla separatrice, sulla quale il movimento cessa di essere periodico.

Esercizio 4.5: Calcolare il primo termine della correzione al periodo armonico nel caso dell'energia potenziale $V(x) = x^2/2 - x^3/3$.

4.4 Sistemi con attrito

La meccanica dei sistemi conservativi fa uso di modelli ideali, in cui le forze sono puramente posizionali e ben determinate perché si fa astrazione da tutti gli elementi che potrebbero disturbarlo. Nei sistemi reali, ed in particolare in quelli che possiamo costruire nei nostri laboratori, non possiamo prescindere dall'esistenza dei disturbi. Così, ad esempio, i gravi cadono con moto uniformemente accelerato, con accelerazione indipendente dalla massa e dalla forma geometrica del corpo solo nell'ipotesi ideale di caduta nel vuoto;⁸ i pendoli reali possono oscillare un più o meno a lungo, ma alla fine si fermano; &c.

Il problema è che dovremmo tener conto di *tutte* le forze che agiscono sul punto materiale. Ad esempio, nella caduta di un grave in condizioni normali dovremmo tener conto dell'esistenza dell'atmosfera. In linea di principio potremmo pensare all'urto del grave contro le molecole dell'aria, con conseguente scambio di energia, ma non ci vuol

⁷ Il calcolo dell'integrale ellittico per tracciare il grafico in figura 4.9 è stato eseguito mediante l'approssimazione^[1]

$$K(m) = [a_0 + a_1(1-m) + a_2(1-m)^2 + a_3(1-m)^3 + a_4(1-m)^4] - [b_0 + b_1(1-m) + b_2(1-m)^2 + b_3(1-m)^3 + b_4(1-m)^4] \log(1-m),$$

dove le costanti $a_0, \dots, a_4, b_0, \dots, b_4$ sono

$a_0 = 1.38629\,436112$	$b_0 = 0.5$
$a_1 = 0.09666\,344259$	$b_1 = 0.12498\,593597$
$a_2 = 0.03590\,092383$	$b_2 = 0.06880\,248576$
$a_3 = 0.03742\,563713$	$b_3 = 0.03328\,355346$
$a_4 = 0.01451\,196212$	$b_4 = 0.00441\,787012$

L'errore commesso è dell'ordine di 10^{-8} .

⁸ Si pensi all'esperimento del *tubo di Newton*: si fanno cadere una piuma ed una pallina di piombo in un tubo, prima lasciando il tubo pieno d'aria, poi avendo estratto (in buona parte) l'aria dal tubo con una pompa a vuoto. Nel primo caso la piuma volteggia ed arriva in fondo in sensibile ritardo rispetto alla pallina — il che è quanto qualunque persona dotata di senso comune si aspetterebbe; nel secondo caso il tempo di caduta è identico per ambedue gli oggetti.

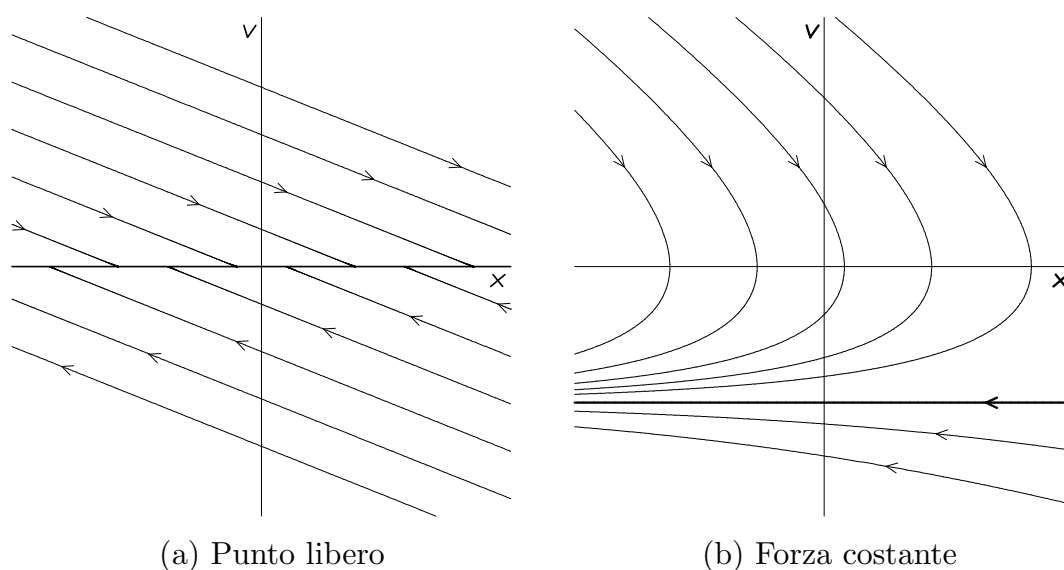


Figura 4.10. Il caso del punto libero e della caduta dei gravi in presenza di attrito viscoso.

molto a rendersi conto che sarebbe impresa a dir poco immane. Meglio dunque considerare un effetto in qualche modo mediato, che chiamiamo *attrito*, e che descriviamo come una forza dipendente dalla velocità.

Lo schema più semplice consiste nel considerare il cosiddetto *attrito viscoso*, che assumiamo proporzionale alla velocità e diretto in senso contrario ad essa. In termini semplici, aggiungiamo nelle equazioni che abbiamo scritto fin qui un termine $-kv$, con una costante $k > 0$. Naturalmente, nessuno proibisce di considerare anche valori negativi di k : non è sempre detto che si tratti di un puro divertimento matematico.

Vogliamo qui ridiscutere gli esempi che abbiamo trattato nel paragrafo 4.3.2 aggiungendo un termine di attrito. Naturalmente non potremo più affidarci alla conservazione dell'energia nel costruire il diagramma di fase.

4.4.1 Punto libero e caduta dei gravi

Nel caso del punto libero scriveremo l'equazione di Newton nella forma

$$(4.20) \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\gamma v, \quad \gamma = \frac{k}{m}.$$

Si tratta di un'equazione lineare che ricade nel caso di un autovalore nullo. Per tracciare il diagramma di fase si osserva anzitutto che tutto l'asse $v = 0$ è costituito da punti di equilibrio. Poi è conveniente eliminare il tempo tra le (4.20), e si trova $\frac{dv}{dx} = -\gamma$. Questa equazione descrive un fascio di rette parallele di pendenza $-\gamma$. Il risultato è rappresentato in figura 4.10(a); tutte le orbite con velocità iniziale v_0 non nulla tendono asintoticamente al punto di equilibrio $(x_0 + v_0/\gamma, 0)$. Il lettore non avrà difficoltà a riconoscere che la soluzione si scrive

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \quad v(t) = v_0 e^{-\gamma t},$$

dove x_0 e v_0 sono la posizione e la velocità iniziale.

Per il caso della caduta dei gravi l'equazione di Newton prende la forma di un sistema lineare non omogeneo

$$(4.21) \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\gamma v - g,$$

il cui corrispondente omogeneo è il (4.20) che abbiamo appena discusso. Per tracciare il diagramma di fase si osserva subito che non vi sono punti di equilibrio. Guardando la seconda equazione però ci si rende conto immediatamente che per $v_0 = -g/\gamma$ si ha la soluzione $v(t) = v_0$ a cui corrisponde $x(t) = v_0 t$. Dunque la retta orizzontale $v = -g/\gamma$ è un'orbita percorsa con velocità costante, tracciata a tratto più spesso in figura 4.10(b). Per trovare le altre orbite si può procedere ancora ad eliminare il tempo nelle equazioni (4.21), e si trova l'equazione a variabili separabili

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\gamma v + g}{v}.$$

Integrandola col metodo che ormai conosciamo ricaviamo

$$x = C - \frac{v}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} \log |g + \gamma v|,$$

con una costante arbitraria C . Il diagramma di fase è rappresentato in figura 4.10(b). Anche qui, il lettore non avrà difficoltà a calcolare la soluzione corrispondente ai dati iniziali (x_0, v_0) , e otterrà

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\gamma} \left(v_0 + \frac{g}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t, \quad v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}.$$

È interessante verificare che l'andamento qualitativo della figura 4.10(b) resta valido anche se si cerca un'espressione più generale per l'attrito. Precisamente, consideriamo una funzione della velocità della forma $-v\psi(|v|)$, con una funzione $\psi(s)$ definita su \mathbb{R}_+ e soddisfacente $\psi(s) > 0$ (l'attrito tende sempre a frenare il movimento) ed anche $\psi'(s) \geq 0$ (l'attrito cresce almeno linearmente con la velocità). Scriveremo allora l'equazione di Newton nella forma

$$(4.22) \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = -v\psi(|v|) - g.$$

Non vi sono punti di equilibrio, ma l'equazione $v\psi(|v|) + g = 0$ ammette certamente una soluzione,⁹ che denoteremo con \bar{v} . Dunque esiste la soluzione $(x(t) = \bar{v}t, v(t) = \bar{v})$, rappresentata nel diagramma di fase da una retta orizzontale. Per costruire il resto del diagramma eliminiamo ancora il tempo tra le (4.22), e otteniamo

$$\frac{dv}{dx} = -\psi(|v|) - \frac{g}{v},$$

che ha segno negativo per $v > 0$ e per $v < \bar{v}$, mentre ha segno positivo per $\bar{v} < v < 0$. Per $v = 0$ la derivata diventa infinita; si noti che non vi possono essere punti di

⁹ Detto $\alpha = \psi(0) > 0$, per le ipotesi fatte vale certamente $|v|\psi(|v|) \geq \alpha|v|$.

equilibrio. Possiamo ora calcolare la derivata seconda, ricordando che il membro di destra dipende da x tramite v , e otteniamo

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \left(-\psi'(|v|) \operatorname{sgn} v + \frac{g}{v^2} \right) \frac{dv}{dx} ,$$

dove $\operatorname{sgn} v$ denota la funzione *signum*, il segno di v . Ora, per $v < 0$ il termine in parentesi è positivo, e dunque la derivata seconda ha il segno della derivata prima; per $v > 0$ il termine tra parentesi è certamente positivo per v non troppo grandi, e dunque la derivata seconda è negativa. Il fatto che la derivata seconda possa diventare positiva ad alte velocità non dà particolarmente fastidio perché comunque resta il segno negativo della derivata prima che non può mai annullarsi. Si vede dunque che l'andamento qualitativo delle orbite resta sostanzialmente ben descritto dalla figura 4.10(b).

4.4.2 Le oscillazioni smorzate

Andiamo ora ad inserire un termine di attrito viscoso nell'equazione dell'oscillatore armonico. Riscriviamo dunque l'equazione di Newton come $\ddot{x} = -\omega^2 x - \gamma \dot{x}$, ovvero come

$$(4.23) \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 x - \gamma v .$$

Come esercizio matematico, permettiamo alla costante γ di assumere qualunque valore reale. L'equazione è lineare, ma non completamente banale come nei casi visti fin qui.

La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$. Dunque abbiamo

$$\operatorname{Tr} A = -\gamma, \quad \det A = \omega^2 .$$

Guardiamo il diagramma di biforcazione della figura 3.7. Al variare di γ da $-\infty$ a $+\infty$ si percorre una retta orizzontale ad altezza ω^2 , da destra verso sinistra. Sono possibili i comportamenti seguenti:

- (i) Nodo instabile per $\gamma < -2\omega$;
- (ii) Nodo degenerare instabile per $\gamma = -2\omega$;
- (iii) Fuoco instabile per $\gamma > -2\omega < 0$;
- (iv) Centro per $\gamma = 0$; è il caso dell'oscillatore armonico;
- (v) Fuoco stabile per $0 < \gamma < 2\omega$;
- (vi) Nodo degenerare stabile per $\gamma = 2\omega$;
- (vii) Nodo stabile per $\gamma > 2\omega$.

Il quadro completo dei comportamenti possibili, con la sola eccezione del caso del centro che abbiamo già visto, è riassunto in figura 4.11.

Per scrivere in modo esplicito le soluzioni occorre eseguire il procedimento indicato nel paragrafo 3.2. Diamo qui i risultati per i casi $\gamma > 0$, lasciando al lettore la facile verifica.

- (i) Per $0 < \gamma < 2\omega$ si ha attrito debole. Gli autovalori sono $\lambda = \mu \pm i\nu$, con $\mu = -\frac{1}{2}\gamma$ e $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$. La soluzione generale si scrive

$$x(t) = Ae^{-\mu t} \cos(\nu t + \varphi) ,$$

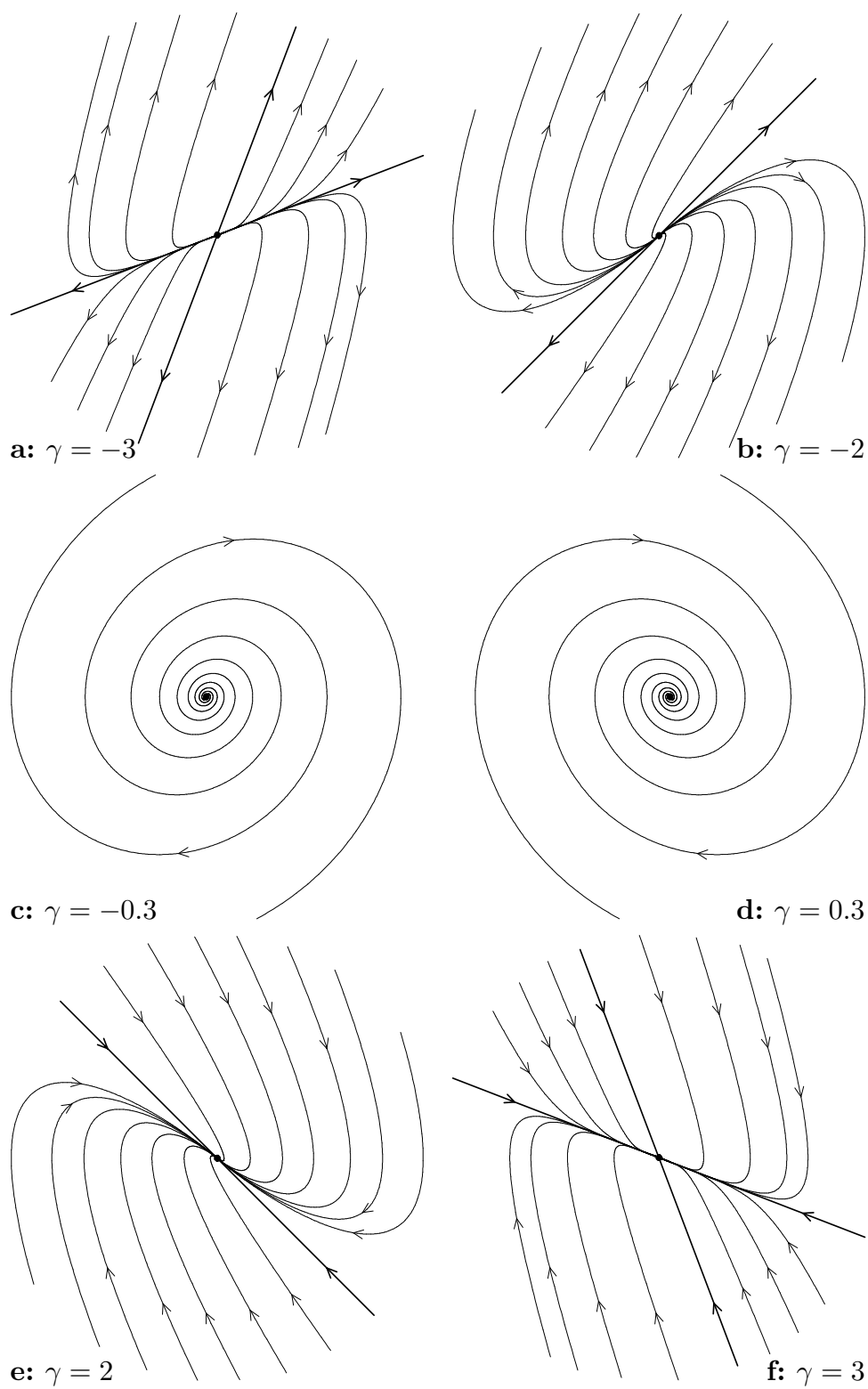


Figura 4.11. Il diagramma di fase al variare di γ per l'equazione lineare $\ddot{x} = -x - \gamma\dot{x}$.

dove A e φ devono essere determinati dalle condizioni iniziali. Si osservi che il movimento è ancora oscillatorio, ma la frequenza è modificata rispetto a quella del caso senza attrito. Il sistema esegue infinite oscillazioni attorno al punto di equilibrio, ma l'ampiezza decresce esponenzialmente.

- (ii) Per $\gamma = 2\omega$ si ha un solo autovalore $\lambda = -\gamma/2$, di molteplicità 2. La soluzione generale si scrive

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} ,$$

con le costanti A e B da determinare mediante le condizioni iniziali. Il sistema si porta all'equilibrio facendo al più mezza oscillazione.

- (iii) Per $\gamma > 2\omega$ si ha la coppia di autovalori reali e distinti $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\gamma/2 \pm \sqrt{2 - 4\omega^2})$. La soluzione generale si scrive

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} ,$$

anche qui con due costanti A e B da determinarsi mediante le condizioni iniziali. È il caso del cosiddetto *sovrasmorzamento*. Anche in questo caso il sistema ha al più un unico punto di arresto, e poi si avvia mestamente verso l'equilibrio.

Esercizio 4.6: Studiare l'andamento qualitativo delle orbite nel piano di fase per il repulsore armonico con attrito viscoso, $\ddot{x} = \lambda^2 x - \gamma \dot{x}$. Si considerino tutti i valori reali di γ .

4.4.3 Il pendolo smorzato

Il caso del pendolo con attrito viscoso è decisamente più difficile. L'equazione di Newton si scrive $\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta - \gamma \dot{\vartheta}$, ovvero

$$(4.24) \quad \dot{\vartheta} = v , \quad \dot{v} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta - \gamma v .$$

Dobbiamo ancora ricordare che lo spazio delle fasi è un cilindro. Le posizioni di equilibrio restano invariate rispetto al caso senza attrito: $\vartheta = 0$ è la posizione di equilibrio inferiore (stabile), e $\vartheta = \pi$ è la posizione di equilibrio superiore (instabile).

Per studiare l'approssimazione lineare del sistema in prossimità dei punti di equilibrio dobbiamo calcolare lo Jacobiano dei secondi membri

$$J(\vartheta, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \vartheta & -\gamma \end{pmatrix} .$$

Nel punto di equilibrio stabile, $\vartheta = 0$, $v = 0$, lo Jacobiano vale

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\gamma \end{pmatrix} .$$

Riferendoci al diagramma di biforcazione vediamo che il sistema si è spostato dalla semiretta dei centri alla regione dei fuochi stabili o addirittura, per valori di γ alti, alla regione dei nodi stabili. Il calcolo analogo per l'equilibrio superiore mostra invece che questo è rimasto un punto di sella.

Il tracciamento del diagramma di fase non è propriamente semplice. Lo riportiamo in figura 4.12 per valori piccoli di γ , lasciando al lettore l'esercizio di convincersi che

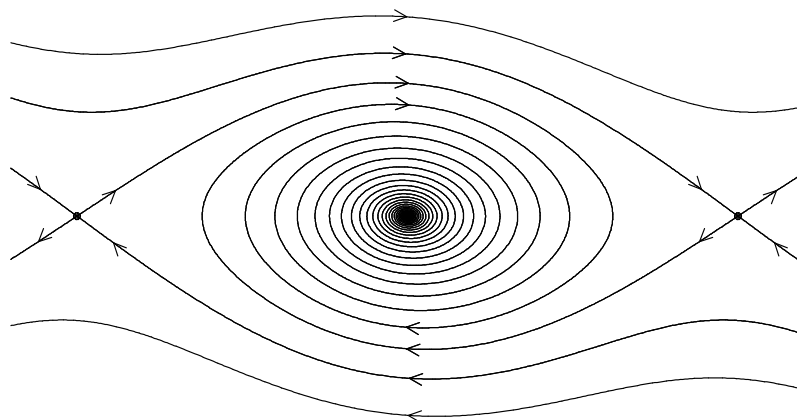


Figura 4.12. Il diagramma di fase per il pendolo smorzato.

è corretto.¹⁰ È da osservare il fatto che le separatrici continuano ad esistere, ma non si richiudono più sui punti di equilibrio instabili. Questo è un fatto non banale, che è oggetto di dimostrazione nel *teorema della varietà stabile*. Se si ricorda che lo spazio delle configurazioni è un cilindro ci si rende conto rapidamente che quasi tutte le orbite sono asintotiche al punto di equilibrio stabile. Fanno eccezione solo le separatrici corrispondenti alle direzioni contraenti del punto di equilibrio stabile.

Esercizio 4.7: Studiare il movimento di un punto che obbedisca all'equazione $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x}^2 + \omega^2x = 0$. Mostrare in particolare che il sistema ammette moti periodici.¹¹

Esercizio 4.8: Tracciare in modo qualitativo il diagramma di fase per il sistema retto dall'equazione $\ddot{x} = -V'(x) - \gamma\dot{x}$, con $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

4.5 Le oscillazioni forzate

Veniamo ora a considerare il caso non autonomo. È particolarmente interessante il caso di un sistema oscillante che sia sottoposto ad una forzante periodica. Il modello più semplice è quello di un oscillatore armonico che obbedisca all'equazione

$$(4.25) \quad \ddot{x} + \omega^2x = f(t), \quad f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Potremo poi includere nell'equazione un termine di attrito viscoso $-\gamma\dot{x}$.

Equazioni di questo tipo descrivono, almeno in prima approssimazione, un gran numero di sistemi, dai circuiti elettrici alle apparecchiature meccaniche, alla dinamica degli asteroidi nel sistema solare. Il fenomeno più rilevante è la *risonanza*. Noi ci

¹⁰ Un buon suggerimento è prendere in considerazione l'energia del pendolo, e calcolarne la derivata temporale verificando che è negativa. Per piccoli valori di γ si può dunque pensare che il comportamento locale delle orbite sia sostanzialmente simile a quello del pendolo non smorzato, con uno scivolamento sistematico verso le regioni di energia più bassa.

¹¹ Ricondurre l'equazione ad un sistema piano, e ricavare l'equazione delle orbite eliminando il tempo. Poi si rilegga il paragrafo 2.3.2.

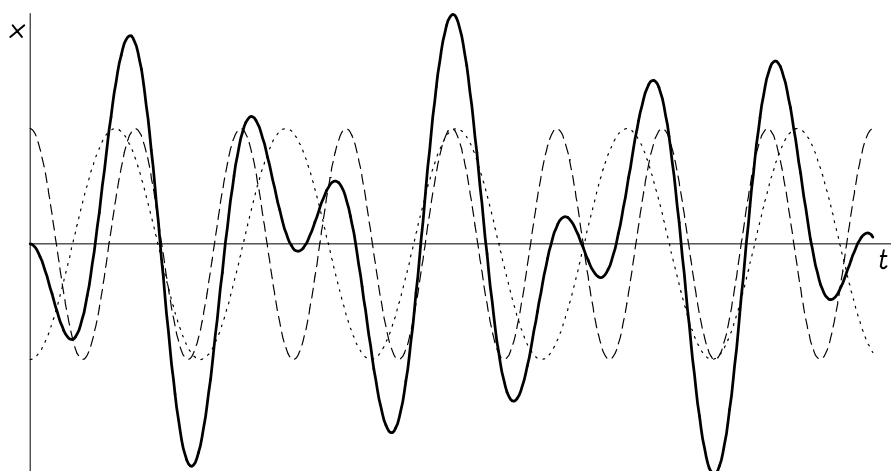


Figura 4.13. Il movimento di un oscillatore armonico di frequenza ω soggetto ad una forzante puramente sinusoidale di frequenza ν ben diversa da ω . Le curve tratteggiate sono le singole componenti sinusoidali, che si ricompongono nella curva a tratto continuo.

limiteremo a studiare il caso di oscillatori lineari, per i quali i fenomeni di risonanza sono limitati e descrivibili in modo relativamente semplice. Nel caso di sistemi non lineari le equazioni diventano subito estremamente difficoltose, e tipicamente ci si trova in presenza di sistemi che possono avere un comportamento caotico.

4.5.1 Oscillatore con forzante sinusoidale

Iniziamo lo studio con il caso semplice di un oscillatore armonico soggetto ad una forzante sinusoidale, descritto dall'equazione

$$(4.26) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = a \cos \nu t ,$$

dove a è una costante, e ν la frequenza angolare della forzante. Si tratta di un'equazione lineare non omogenea, e dunque la sua soluzione si costruisce sovrapponendo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, ossia dell'oscillatore armonico che ormai ben conosciamo, con una soluzione particolare dell'equazione completa. Il metodo più diretto consiste nel cercare una soluzione che abbia la stessa frequenza della forzante, ossia abbia la forma

$$x(t) = R \cos \nu t .$$

Per sostituzione si verifica rapidamente che in effetti questa è una soluzione purché sia $\nu \neq \omega$, e si ponga

$$(4.27) \quad R = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} ;$$

è questa la *risposta* dell'oscillatore alla forzante. La soluzione generale è la sovrapposizione delle *oscillazioni proprie* di frequenza ω e delle *oscillazioni forzate* di frequenza ν :

$$(4.28) \quad x(t) = R \cos \nu t + A \cos(\omega t + \varphi) ,$$

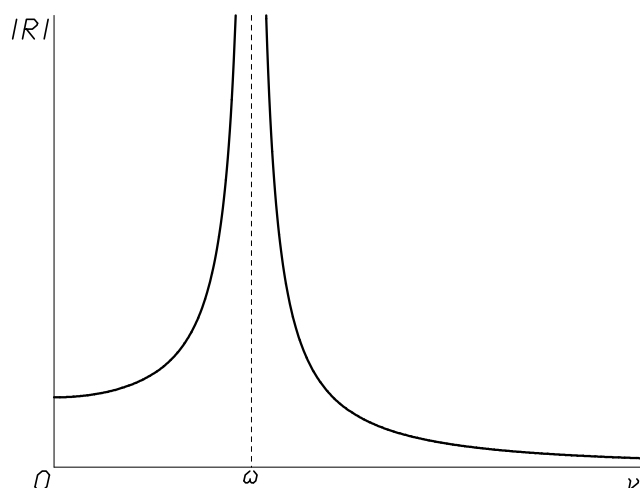


Figura 4.14. L'ampiezza $|R|$ dell'oscillazione forzata come funzione della frequenza ν della forzante.

dove l'ampiezza A e la fase φ devono essere determinate mediante le condizioni iniziali e R è dato dalla (4.27). Si osservi che l'ampiezza R delle oscillazioni forzate non dipende dai dati iniziali.

Ad esempio, se imponiamo le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $v(0) = 0$ (la forzante agisce su un punto inizialmente a riposo) troviamo facilmente $A = -R$, $\varphi = 0$, e dunque potremo scrivere la soluzione come

$$(4.29) \quad x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} (\cos \nu t - \cos \omega t)$$

L'andamento temporale di quest'ultima soluzione nel caso di frequenze ω e ν ben distinte è riportato in figura 4.13.

L'aspetto interessante da osservare è la dipendenza della risposta R come funzione della frequenza ν della forzante, pensando ad un oscillatore con frequenza fissata. In figura 4.14 è riportato il grafico di $|R|$. Il cambiamento di segno dell'ampiezza si traduce in un cambiamento di π della fase delle oscillazioni forzate: per $\nu < \omega$ le oscillazioni forzate sono in fase con la forzante; per $\nu > \omega$ sono in contro-fase. Si osserva anche che la risposta tende rapidamente a zero quando la frequenza della forzante diventa molto alta. Infine, per ν prossimo a ω l'ampiezza delle oscillazioni forzate cresce rapidamente, fino a diventare infinita quando le due frequenze coincidono. Questo fenomeno, detto *risonanza*, merita una discussione più approfondita: il tendere all'infinito dell'ampiezza indica chiaramente che in presenza di una risonanza si possono avere effetti drammatici.¹²

¹² Uno degli episodi più drammatici dovuti agli effetti della risonanza è il crollo del ponte sospeso di Tacoma, nello stato di Washington. Il ponte, con una campata di 1.9 km, fu aperto al traffico il 1 luglio 1940, e divenne rapidamente noto per il suo movimento ondulatorio dovuto alle raffiche di vento. Il 7 novembre dello stesso anno, una giornata di vento particolarmente forte (circa 70 Km/ora), il movimento ondulatorio divenne particolarmente marcato e indusse un'oscillazione di tipo torsionale. La risonanza con le

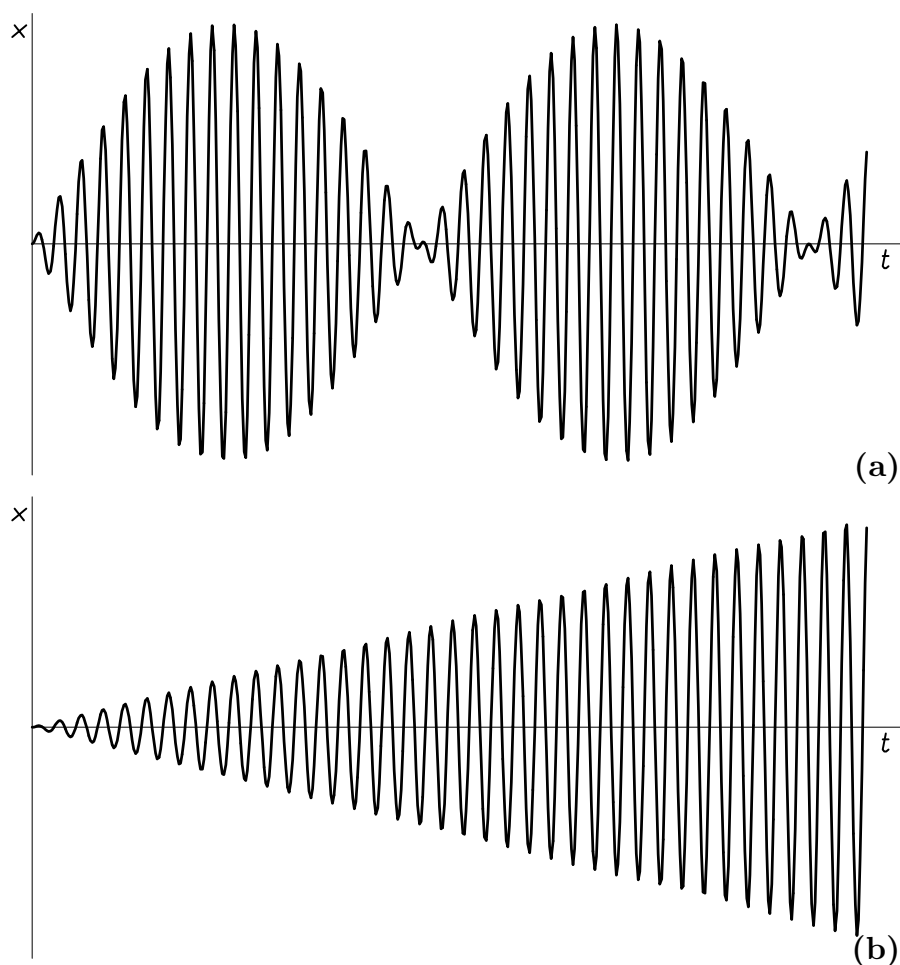


Figura 4.15. Il fenomeno dei battimenti e della risonanza.

Per comprendere meglio cosa accade riprendiamo la soluzione particolare (4.29), e consideriamo delle frequenze $\omega = \Omega + \varepsilon$ e $\nu = \Omega - \varepsilon$, con ε molto piccolo rispetto a Ω , sicché la soluzione diventa

$$(4.30) \quad x(t) = \frac{a}{4\Omega\varepsilon} [\cos(\Omega - \varepsilon)t - \cos(\Omega + \varepsilon)t] .$$

Facendo uso delle formule di prostaferesi¹³ riscriviamo la soluzione nella forma più

frequenze naturali del ponte incrementò l'ampiezza delle oscillazioni, fino a superare il limite di rottura della campata.

¹³ O formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} , & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} , \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} , & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} . \end{aligned}$$

utile

$$(4.31) \quad x(t) = \frac{a}{2\Omega\varepsilon} \sin \varepsilon t \sin \Omega t .$$

Tenuto conto della variazione lenta dell'oscillazione con frequenza ε si può ben dire che questa formula descrive un movimento oscillatorio di frequenza Ω la cui ampiezza è modulata dal fattore $\sin \varepsilon t$. Il grafico della soluzione come funzione del tempo è rappresentato in figura 4.15(a). La variazione lenta ma periodica dell'ampiezza viene chiamata *battimento*.¹⁴

Nel caso in cui le due frequenze coincidano l'equazione (4.26) assume la forma

$$\ddot{x} + \nu^2 x = a \cos \nu t ,$$

e la soluzione (4.28) non si applica più direttamente. In generale dovremmo trovare una soluzione particolare che non sia di semplice forma sinusoidale, ad esempio col metodo di variazione delle costanti di Lagrange. Se però consideriamo il caso semplice di un sistema inizialmente a riposo possiamo sfruttare ancora la soluzione (4.31) calcolandone il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$. In effetti, tenendo conto che $\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon} \rightarrow t$ otteniamo la funzione (ricordiamo che qui $\omega = \nu = \Omega$)

$$(4.32) \quad x(t) = \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t ,$$

il cui grafico è rappresentato in figura 4.15(b). Come si verifica direttamente, questa è effettivamente una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, e precisamente quella che corrisponde alle condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Più in generale, si può verificare che se sottoponiamo l'oscillatore ad una forzante $f(t)$ dipendente dal tempo, allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) , \quad x(0) = x_0 , \quad \dot{x}(0) = v_0$$

è data da

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) f(s) ds .$$

Il termine con l'integrale è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea corrispondente a dati iniziali nulli; la parte restante, $x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$, è la soluzione generale dell'equazione omogenea, che contiene i dati iniziali.

Esercizio 4.9: Determinare il movimento di un oscillatore armonico forzato che obbedisca all'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ nei casi seguenti:

- (i) $f(t) = c$ (costante);
- (ii) $f(t) = e^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$;
- (iii) $f(t) = a \cos \nu_1 t + b \cos \nu_2 t$;
- (iv) $f(t) = e^{-\lambda t} \cos \nu t$;

¹⁴ Quello dei battimenti è un fenomeno ben noto a chi abbia provato ad accordare una chitarra: se due corde che vibrano contemporaneamente non sono in perfetto unisono l'orecchio avverte una variazione periodica di intensità del suono, con periodo tanto più lungo quanto più le frequenze sono vicine.

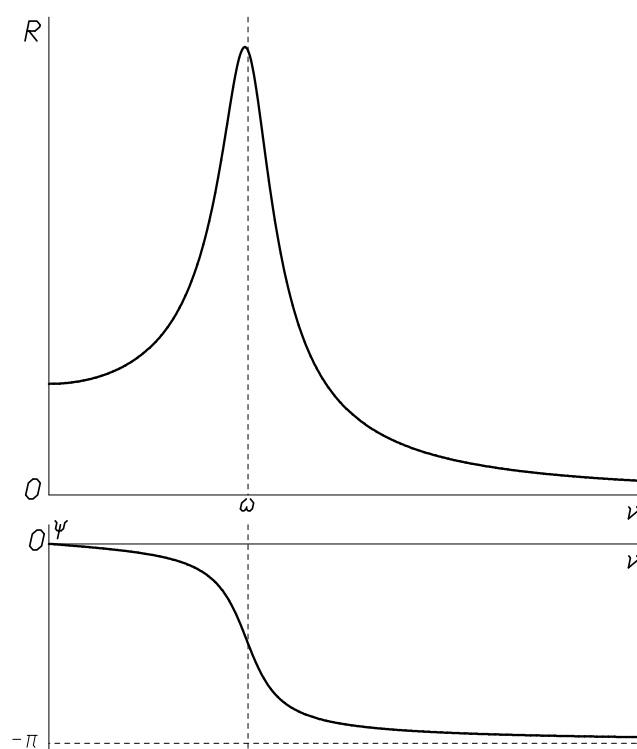


Figura 4.16. L'ampiezza R dell'oscillazione forzata come funzione della frequenza ν della forzante, nel caso di un oscillatore soggetto ad attrito viscoso.

(v) $f(t) = t$

4.5.2 Oscillazioni forzate e smorzate

Aggiungiamo ora all'equazione (4.26) un termine di smorzamento dovuto ad un attrito viscoso. Studieremo dunque l'equazione

$$(4.33) \quad \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = a \cos \nu t .$$

Anche questa è un'equazione lineare non omogenea, per la quale dovremo trovare una soluzione particolare. Procedendo come nel caso non smorzato la cerchiamo della forma

$$x(t) = R \cos(\nu t + \psi) ,$$

dove abbiamo aggiunto un termine di fase che si rivelerà necessario. Per sostituzione otteniamo che R e ψ sono determinati dalle equazioni

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \nu^2)R \cos \psi - \gamma \nu R \sin \psi &= a \\ (\omega^2 - \nu^2)R \sin \psi + \gamma \nu R \cos \psi &= 0 , \end{aligned}$$

che hanno soluzione

$$(4.34) \quad \begin{aligned} R &= \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + \gamma^2 \nu^2}} \\ \psi &= \arctan \frac{\gamma \nu}{\nu^2 - \omega^2} . \end{aligned}$$

Il grafico di ampiezza e fase dell'oscillazione forzata è tracciato in figura 4.16. Si nota immediatamente che anche in caso di risonanza esatta l'ampiezza non tende più ad infinito. Inoltre il massimo della risposta si colloca a frequenza di poco inferiore rispetto a quella propria dell'oscillatore.

La soluzione generale dell'equazione (4.33) si ottiene sovrapponendo la soluzione particolare che abbiamo trovato, e che è indipendente dal dato iniziale, alla soluzione generale dell'equazione omogenea. Quest'ultima ci è ormai ben nota, perchè non è altro che l'oscillatore smorzato. Avremo dunque la soluzione generale

$$(4.35) \quad x(t) = R \cos(\nu t + \psi) + A e^{-\gamma t/2} \cos\left(\frac{t}{2} \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2} + \varphi\right) ,$$

dove R e ψ sono date dalla (4.34), mentre le costanti arbitrarie A e φ devono essere determinate mediante le condizioni iniziali. Dobbiamo però osservare che la componente delle oscillazioni proprie è soggetta a smorzamento esponenziale. Quindi dopo un *transiente* dipendente dall'entità dello smorzamento questa componente viene filtrata, e resta solo l'oscillazione indotta dalla forzante.

Esercizio 4.10: Si determini il moto di un oscillatore smorzato e soggetto ad attrito viscoso che obbedisca all'equazione $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = f(t)$, dove $f(t)$ ha una delle forme proposte nell'esercizio 4.9.

4.6 Il ciclo limite

Veniamo ora al problema alquanto interessante di studiare sotto quali condizioni si possa realizzare un sistema (meccanico, o elettronico, o di altro genere) che presenti un comportamento periodico permanente. La possibilità di costruire un tal sistema è evidentemente cruciale per la misura del tempo. In effetti, la nostra percezione del tempo non va molto al di là di una vaga identificazione con la retta reale: sappiamo in qualche modo identificare la successione temporale tra due eventi, e ci rendiamo conto che l'attimo che è fuggito non potrà ritornare. Ma non siamo in grado di misurare la durata di un intervallo di tempo se non ricorrendo a fenomeni che per qualche ragione ci appaiono come periodici e regolari: il succedersi delle stagioni regolato dal moto del sole attraverso le costellazioni dello zodiaco (l'anno); il susseguirsi delle fasi della luna (il mese); l'alternarsi della luce e del buio a causa del moto diurno del sole (il giorno); il movimento dell'ombra proiettata da un'asticella fissa ed esposta ai raggi del sole (la meridiana); il cadere dell'acqua o della sabbia contenuta in un recipiente attraverso un forellino; le oscillazioni di un pendolo rudimentale fatto solo da una sferetta metallica

appesa ad un filo.¹⁵

È fatto ovvio che qualunque meccanismo che compia movimenti periodici sia soggetto ad attrito, e quindi destinato prima o poi a fermarsi. Ancor più grave è la dipendenza del periodo dall'ampiezza dell'oscillazione: il perfetto isocronismo è prerogativa del solo oscillatore armonico, un modello del tutto astratto. L'ideale sarebbe avere a disposizione un meccanismo che permetta al nostro sistema oscillante di riguadagnare l'energia che dissipa a causa dell'attrito, e che tenda a stabilizzarsi su un'orbita periodica con un periodo ben definito.

La possibilità concettuale di un sistema di questo tipo è l'argomento di questo paragrafo.

4.6.1 L'oscillatore forzato impulsivamente

Il modello più semplice — anche se per ora ancora astratto — è costituito da un oscillatore smorzato e soggetto ad una forza di carattere impulsivo. Immaginiamo un'evoluzione di questo tipo:

- (i) all'istante iniziale facciamo partire il nostro oscillatore dalla configurazione di equilibrio assegnandogli una velocità $v_0 > 0$;
- (ii) Lasciamo evolvere l'oscillatore fin che ripassa l'equilibrio con velocità v_1 positiva;
- (iii) in quell'istante gli diamo un piccolo impulso che incrementa la sua velocità di una quantità δv , sicché il movimento riprende con una velocità iniziale $v'_1 = v_1 + \delta v$.

Immaginiamo di poter ripetere questa operazione per un tempo lungo quanto ci serve. Non ci resta che studiare in modo più preciso questo meccanismo.¹⁶

Descriveremo il nostro oscillatore mediante l'equazione delle oscillazioni smorzate $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$. Nel piano delle fasi l'orbita ha la forma di una spirale che collassa sull'origine. Il movimento attraversa periodicamente il semiasse positivo delle velocità, tagliandolo in una successione di punti che tende all'origine, in conseguenza della forma di spirale dell'orbita; chiameremo questi punti le *sezioni*.¹⁷ Per rendere quantitativa questa informazione consideriamo la soluzione generale $x(t) = Ae^{-\mu t} \cos(\nu t + \varphi)$, con $\mu = \gamma/2$ e $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$, e determiniamo le costanti A , φ mediante la condizione iniziale $x(0) = 0$, $v(0) = v_0 > 0$. Ricaviamo subito il movimento

$$x(t) = \frac{v_0}{\nu} e^{-\mu t} \sin \nu t, \quad v(t) = v_0 e^{-\mu t} \cos \nu t - \frac{\mu v_0}{\nu} e^{-\mu t} \sin \nu t.$$

La sezione successiva avviene al tempo $T = \frac{2\pi}{\nu}$, ed a quell'istante la velocità è diventata $v_1 = av_0$, con $a = e^{-\mu T}$. Poi vi saranno ulteriori sezioni ai tempi $2T$, $3T$, &c, ai quali

¹⁵ Che la nostra percezione del tempo sia del tutto inadatta a misurarlo è fatto che tutti possono verificare immediatamente: chiunque può osservare che dieci minuti in attesa del treno sono molto più lunghi di due ore passate a vedere un bel film.

¹⁶ Questo modello è stato proposto da Andronov, Vitt e Khaikin.^[2]

¹⁷ Il metodo di indagine che utilizziamo qui è la *sezione di Poincaré* di cui abbiamo già detto nel paragrafo 1.3.3.

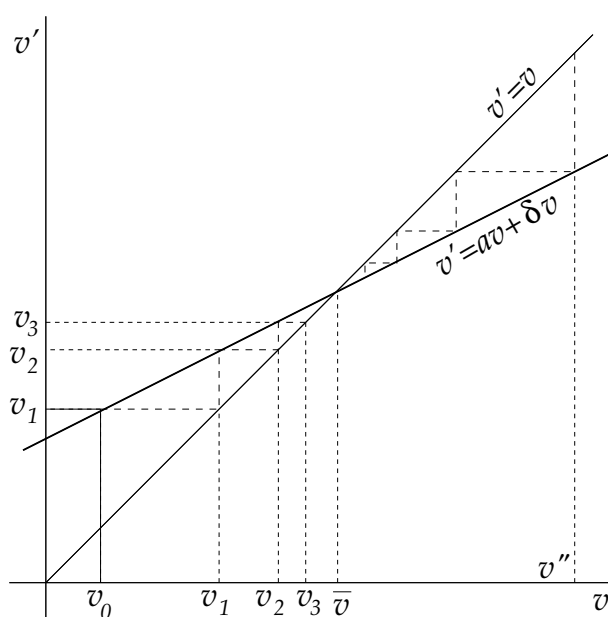


Figura 4.17. La mappa della velocità per l'oscillatore smorzato e forzato impulsivamente.

corrisponderanno velocità $v_2 = av_1 = a^2v_0$, $v_3 = av_2 = a^3v_0$, &c. Questa successione riassume tutte le caratteristiche qualitative rilevanti della dinamica.

Veniamo ora al comportamento impulsivo. Al tempo T sostituiamo la velocità v_1 con $v_1 + \delta v$, con δv arbitrario ma fissato una volta per tutte. Riprendiamo quindi l'orbita fino alla sezione successiva, dove incrementiamo la velocità della stessa quantità δv , &c. Questo meccanismo si rappresenta in modo estremamente semplice dicendo che partendo con velocità v alla sezione successiva la velocità sarà diventata $v' = f(v) = av + \delta v$. È quello che rappresentiamo nel grafico di figura 4.17: interpretiamo quest'ultima funzione come una mappa di \mathbb{R}_+ in se stesso, che associa ad ogni punto v il punto v' dopo una sezione ed un incremento impulsivo. L'intersezione della retta $v' = av + \delta v$ con la bisettrice del primo quadrante dà un punto fisso \bar{v} della mappa: se si parte con la velocità \bar{v} l'impulso dato alla sezione successiva compensa esattamente la perdita di velocità dovuta all'attrito. Questa è un'orbita strettamente periodica, con un periodo fissato. Non resta che provare che partendo con qualunque velocità iniziale il sistema tende asintoticamente a quest'orbita.

A livello qualitativo si può procedere con un metodo grafico: l'immagine del punto v_0 è il punto v_1 sull'asse verticale; lo si riporta sull'asse orizzontale e se ne trova l'immagine v_2 sull'asse verticale; si riporta v_2 sull'asse orizzontale, &c. Un momento di attenzione ci permetterà di renderci conto che per trovare i punti successivi basta seguire la spezzata tratteggiata che rimbalza tra le due rette oblique: è immediato constatare che la successione dei punti tende a collapsare sul punto \bar{v} . Lo stesso accade se come punto iniziale si prende il punto v'' , o ancora qualunque altro punto sull'asse orizzontale.

Esercizio 4.11: Dimostrare che quello che abbiamo appena detto è vero, ed in

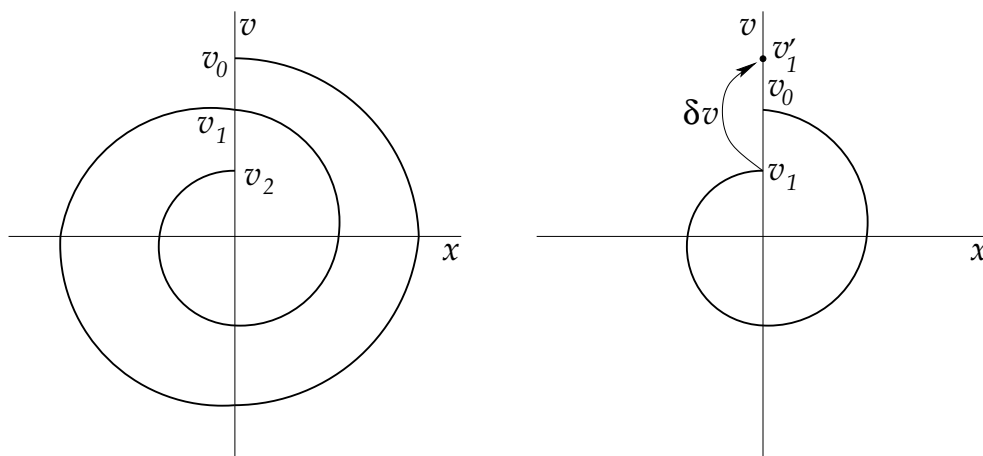


Figura 4.18. Il diagramma di fase qualitativo per un sistema oscillante, soggetto ad attrito e forzato impulsivamente.

particolare che la successione dei punti converge geometricamente a \bar{v} .

Passiamo ora a mostrare che lo stesso comportamento qualitativo si verifica anche con ipotesi molto più deboli, essenzialmente compatibili con un meccanismo reale.

Il primo fatto essenziale è che l'orbita nel piano di fase segua un andamento a spirale che la faccia cadere asintoticamente verso l'origine; questo è del tutto naturale, in presenza di attrito non troppo forte. Che il periodo di ritorno alla sezione sia costante è del tutto irrilevante. Rappresentiamo questa situazione in figura 4.18, a sinistra. Rappresentiamo nella figura di destra il meccanismo impulsivo: al momento della sezione viene incrementata la velocità di una quantità $\delta v = \varphi(v)$, intendendo con questo che l'incremento possa ben dipendere dalla velocità stessa: basta che si mantenga entro certi limiti.

Complessivamente possiamo descrivere il meccanismo con una mappa $v' = f(v)$ differenziabile alla quale chiediamo ben poche caratteristiche: (i) che sia $f(0) > 0$, e (ii) che valga $0 < f'(v) \leq a < 1$ almeno per velocità inferiori ad un certo v^* abbastanza grande.¹⁸ Ne riportiamo un esempio in figura 4.19. Non è difficile rendersi conto che se valgono le condizioni enunciate sopra la mappa ammette un unico punto fisso \bar{v} . Facendo ricorso al metodo grafico vediamo anche che partendo con velocità iniziale non troppo lontana da \bar{v} la successione delle sezioni tende asintoticamente a \bar{v} .

In queste condizioni la dinamica del sistema tende ad un comportamento periodico con un periodo ben fissato, che può ben servire per la misura del tempo. In effetti, il meccanismo dello scappamento ad ancora utilizzato negli orologi a pendolo o a bilanciere è sostanzialmente di questo tipo.

4.6.2 Cenno ad altri modelli

In generale l'esistenza di orbite periodiche isolate, ossia di cicli limite, per equazioni

¹⁸ Le condizioni potrebbero essere ulteriormente indebolite, ma non ci occupiamo qui di trovare la situazione ottimale.

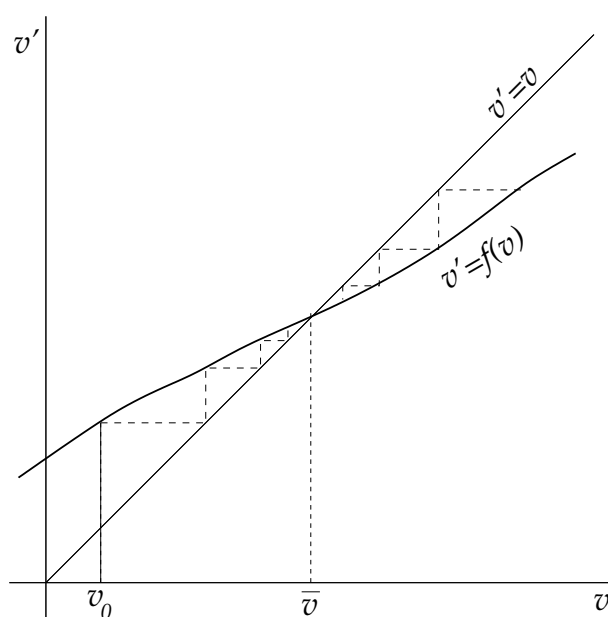


Figura 4.19. L'andamento qualitativo della mappa della velocità per un oscillatore smorzato e forzato impulsivamente.

differenziali nel piano è faccenda alquanto difficile da dimostrare. Un esempio classico di equazione che gode di questa proprietà è il modello di Van der Pol, cui abbiamo già fatto cenno nel paragrafo 1.3.1

$$\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \gamma > 0.$$

Un secondo esempio notevole è l'equazione di Rayleigh¹⁹

$$\ddot{x} - \left(\dot{x} - \frac{1}{3}\dot{x}^3 \right) + x = 0,$$

introdotta alla fine del secolo scorso come modello che descrive le oscillazioni di una corda di violino.

In ambedue i casi si tratta di equazioni in cui il campo vettoriale ha componenti polinomiali. L'apparente semplicità però non deve trarre in inganno. Nel 1900 David Hilbert²⁰ propose come *XVI* problema di determinare il numero di cicli limite per le equazioni nel piano che abbiano secondo membro polinomiale. Circa vent'anni fa Ilyashenko è riuscito a dimostrare che essi sono in numero finito, ma il problema di determinarne la cardinalità in funzione del grado dei polinomi resta aperto.

Esercizio 4.12: Studiare le orbite nel piano delle fasi per i sistemi seguenti:

$$(1) \quad \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1);$$

¹⁹ John William Strutt Lord Rayleigh, nato a Langford Grove, Essex, Inghilterra, 12 novembre 1842; morto a Terling Place, Essex, Inghilterra, 30 giugno 1919.

²⁰ David Hilbert: nato a Königsberg, Prussia (ora Kaliningrad, Russia), 23 gennaio 1862; morto a Göttingen (Germania), 14 Febbraio 1943.

(2) $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2) \sin \sqrt{x^2 + y^2}$, $\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2) \sin \sqrt{x^2 + y^2}$.

In (1) e (2) determinare eventuali cicli limite e la loro stabilità. In (3) mostrare che il sistema linearizzato intorno all'equilibrio $x = y = 0$ è un centro, ma il comportamento del sistema non lineare per $\varepsilon \neq 0$ non è quello di un centro.

